Các bạn học sinh thân mến !

Những năm gần đây, câu hình học tọa độ phẳng Oxy thuộc hệ thống câu hỏi phân loại, đây là loại bài tập tương đối khó. Để giải quyết được, yêu cầu chúng ta phải phát hiện ra những tính chất đặc biệt trên hình. Các tính chất đặc biệt này chủ yếu nằm trong chương trình toán học cấp THCS mà chúng ta đã học từ lâu, vì vậy đa số các bạn thường không còn nhớ.

Để chinh phục được câu hình học tọa độ phẳng Oxy , trước hết chúng ta cùng ôn lại một số kiến thức đặc trưng đó. Trong tài liệu này, tác giả tạm thời chỉ ra 14 tính chất đặc trực của hình học phẳng để các bạn cùng nhớ lại. Phần tiếp theo của tài liệu là tập hợp 36 bài toán có hướng dẫn giải, vận dụng 14 tính chất đã trình bày để minh họa cụ thể. Tuy lượng bài tập không nhiều nhưng nó đã bao quát được tương đối đầy đủ các dạng toán trọng tâm và các yếu tố suy luận cần thiết mà đề thi thường khai thác. Kiến thức thật mênh mông không biết học bao giờ cho hết, với phương châm thi gì - học nấy, tác giả hi vọng cuốn tài liệu nhỏ này sẽ giúp bạn có được kiến thức tổng hợp và cách nhìn nhận tốt nhất để tư duy giải thành công câu hình học tọa độ phẳng Oxy trong kỳ thi sắp tới.

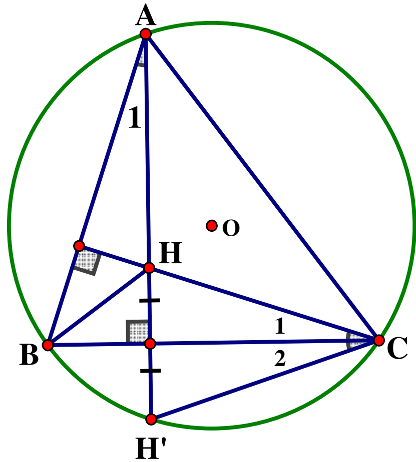
Chúc bạn thành công !

Phần 1

CÙNG ÔN LẠI
CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN
CỦA HÌNH HỌC PHẲNG

Tính chất 1: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm. Họi H' là giao điểm của AH với đường tròn (O) $\Rightarrow H'$ đối xứng với H qua BC

Hướng dẫn chứng minh:



+ Ta có Gọi $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

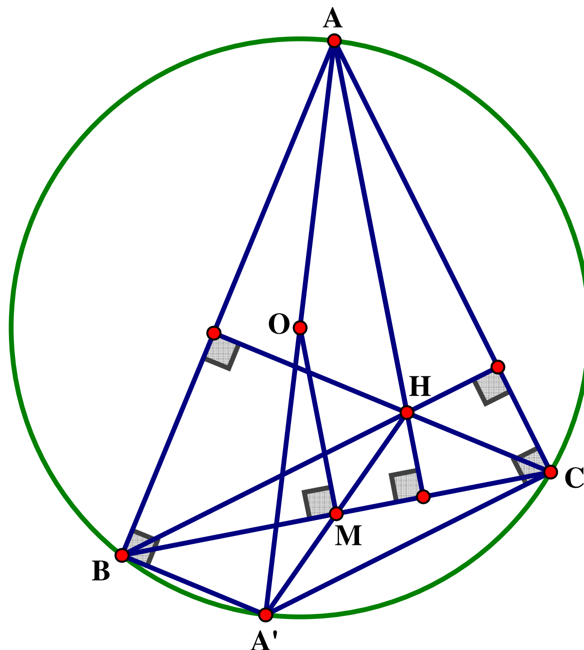
+ Mà $\widehat{A_1} = \widehat{C_2} = \dfrac{sd\widehat{BH'}}{2} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

$\Rightarrow \Delta HCH'$ cân tại C $\Rightarrow$ BC là trung trực của HH'

$\Rightarrow H'$ đối xứng với H qua BC

Tính chất 2: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm, kẻ đường kính AA', M là trung điểm BC $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2.\overrightarrow{OM}$

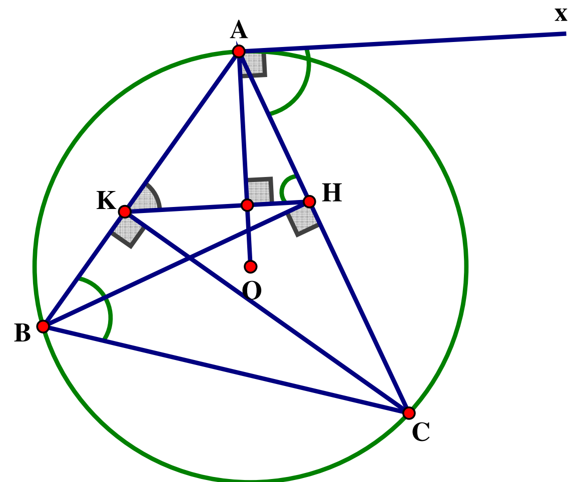
Hướng dẫn chứng minh:



+ Ta có $\widehat{ABA'} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) $\Rightarrow BA \perp BA'$, mà $BA \perp CH \Rightarrow BA' // CH$ (1).

+ Chứng minh tương tự ta cũng có $CA' // BH$ (2)

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tứ giác BHCA' là hình bình hành, mà M là trung điểm đường chéo BC $\Rightarrow$ M là trung điểm của đường chéo A'H $\Rightarrow$ OM là đường trung bình của $\Delta AA'H \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2.\overrightarrow{OM}$



Tính chất 3: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), BH và CK là 2 đường cao của ΔABC $\Rightarrow AO \perp KH$

Hướng dẫn chứng minh:

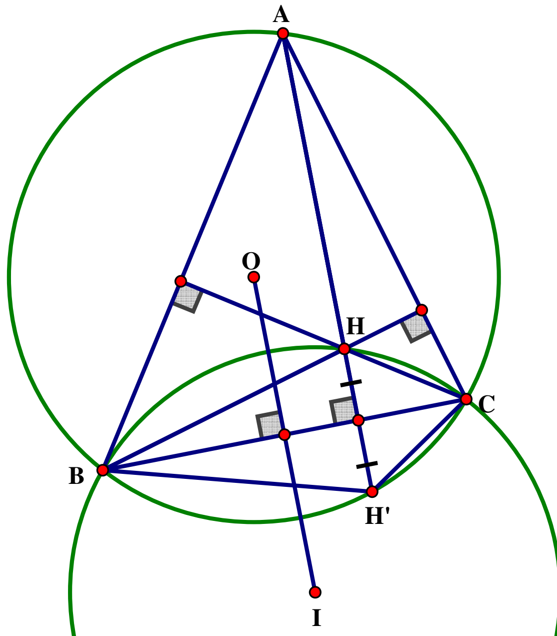
+ Kẻ tiếp tuyến Ax $\Rightarrow \widehat{xAC} = \widehat{ABC} = \dfrac{sd\overset{\frown}{AC}}{2}$

+ Mà $\widehat{ABC} = \widehat{AHK}$ (do tứ giá KHCB nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{xAC} = \widehat{AHK}$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow Ax // HK$

+ Lại có $Ax \perp AO$ (do Ax là tiếp tuyến) $\Rightarrow AO \perp HK$

Tính chất 4: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm, gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta HBC \Rightarrow$ O và I đối xứng nhau qua BC.

Hướng dẫn chứng minh:

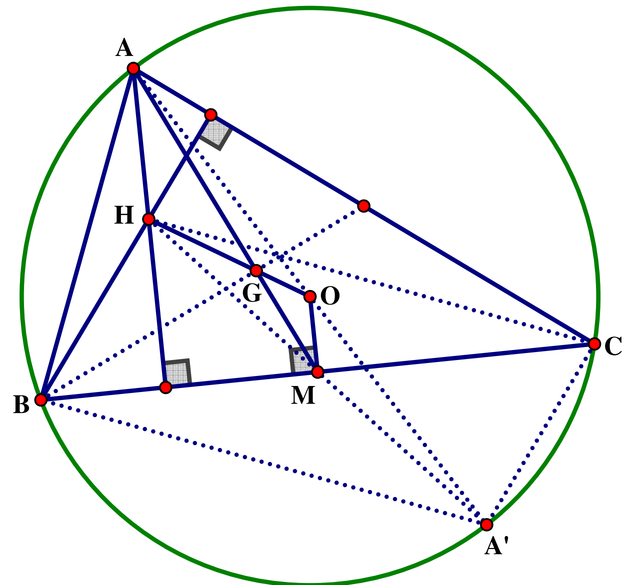


+ Gọi H' là giao điểm của AH với đường tròn (O) $\Rightarrow$ tứ giác ACH'B nội tiếp đường tròn (O) $\Rightarrow$ O đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BH'C$.
+ Mặt khác H và H' đối xứng nhau qua BC (tính chất 1 đã chứng minh) $\Rightarrow \Delta HBC$ đối xứng với $\Delta H'BC$ qua BC, mà O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta H'BC$ và $\Delta HBC \Rightarrow$ I và O đối xứng nhau qua BC.

Tính chất 5: *(Đường thẳng Ơ - le)* Cho ΔABC, gọi H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoài tiếp ΔABC. Khi đó ta có:
1). $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
2). 3 điểm O, G, H thẳng hàng và $\overrightarrow{OH} = 3.\overrightarrow{OG}$

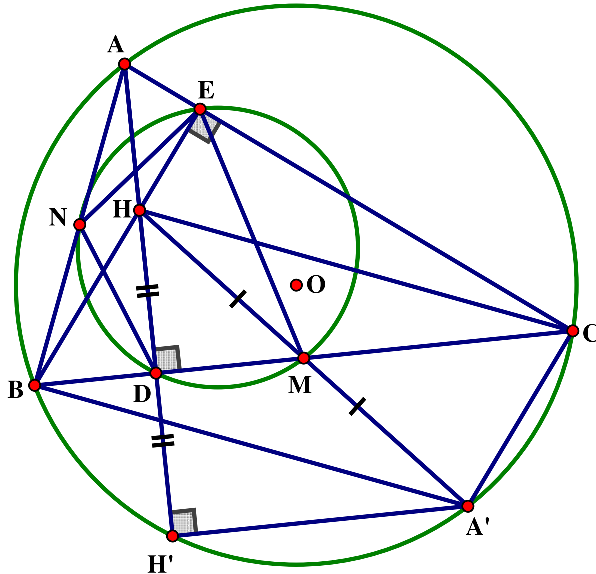
Hướng dẫn chứng minh:

1). Ta đã chứng minh được $\overrightarrow{AH} = 2.\overrightarrow{OM}$ (đã chứng minh ở tính chất 2)
+ Ta có :
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}$
2). Do G là trọng tâm ΔABC
$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3.\overrightarrow{OG}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + 2.\overrightarrow{OM} = 3.\overrightarrow{OG}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = 3.\overrightarrow{OG}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3.\overrightarrow{OG}$
Vậy 3 điểm O, G, H thẳng hàng



Tính chất 6: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E theo thứ tự là chân các đường cao từ A, B. Các điểm M, N theo thứ tự là trung điểm BC và AB. $\Rightarrow$ tứ giác MEND nội tiếp.

Hướng dẫn chứng minh:



+ Ta có D là trung điểm HH' (tính chất 1), M là trung điểm HA' (do HCA'B là hình bình hành - tính chất 2). Như vậy ta có phép vị tự :

$$V_{\left(H;\frac{1}{2}\right)}:\begin{cases}(A')=M\\(H')=D\end{cases}$$

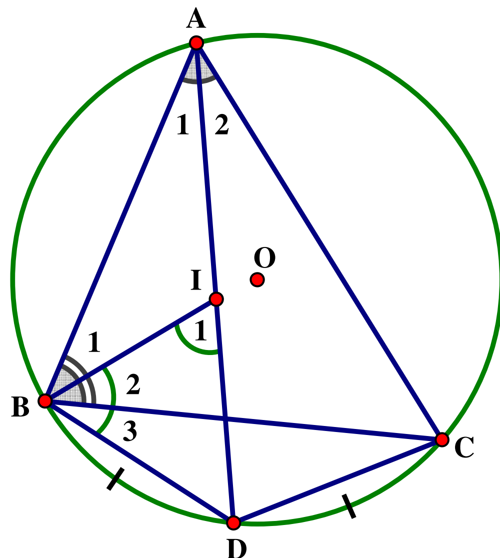
+ Mà 2 điểm A', H' thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC $\Rightarrow$ 2 điểm M, D thuộc đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) tâm O qua phép vị tự $V_{\left(H;\frac{1}{2}\right)}$ (1)

+ Chứng minh tương tự ta cũng có 2 điểm N, E thuộc đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) tâm O qua phép vị tự $V_{\left(H;\frac{1}{2}\right)}$ (2)

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ 4 điểm D, M, E, N thuộc đường tròn (C').

Tính chất 7: Cho ΔABC, gọi O và I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, AI cắt đường tròn (O) tại D $\Rightarrow DB = DI = DC$

Hướng dẫn chứng minh:



+ Ta có $\hat{I}_1 = \widehat{A_1} + \widehat{B_1}$ (do $\hat{I}_1$ là góc ngoài ΔABI)

+ Mà $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (Do BI là phân giác ΔABC), $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (Do AI là phân giác ΔABC), mà

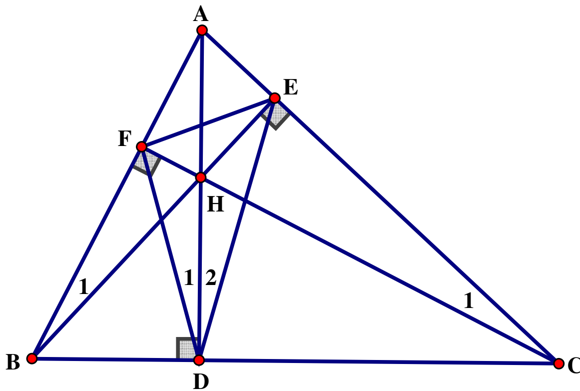
$\widehat{A_2} = \widehat{B_3} = \dfrac{sd\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \hat{I}_1 = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = \widehat{IBD} \Rightarrow \Delta IBD$ cân tại D $\Rightarrow DI = DB$ (1)

+ Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow BD = DC$ (2)

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow DB = DI = DC$

Tính chất 8: Cho ΔABC, gọi D, E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B, C của ΔABC. Gọi H là trực tâm ΔABC $\Rightarrow$ H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF

Hướng dẫn chứng minh:



+ Ta có tứ giác BDHF nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (1)

+ Tứ giác ECDH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_2}$ (2)

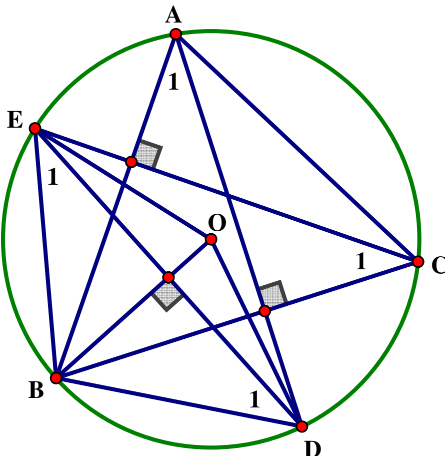
+ Mà $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \Rightarrow$ DH là phân giác của ΔDEF (*)

- Chứng minh tương tự ta cũng có EH, FH là các tia phân giác của ΔDEF (**)
- Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF

Tính chất 9: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E là giao điểm của đường tròn (O) với các đường cao qua A và C $\Rightarrow$ OB là trung trực của ED.

Hướng dẫn chứng minh:



+ Ta có $\hat{E}_1 = \hat{A}_1 = \dfrac{sd\overset{\frown}{BD}}{2}$, $\hat{D}_1 = \hat{C}_1 = \dfrac{sd\overset{\frown}{BE}}{2}$, $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) $\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \Delta EBD$ cân tại B

$\Rightarrow BE = BD$ (1)

+ Mà $OE = OD$ (bán kính đường tròn tâm O) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ OB là trung trực của ED

Tính chất 10: Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm I, G là trọng tâm ΔABC. Gọi D là trung điểm AB, E là trọng tâm ΔADC $\Rightarrow$ I là trực tâm ΔDEG

Hướng dẫn chứng minh:

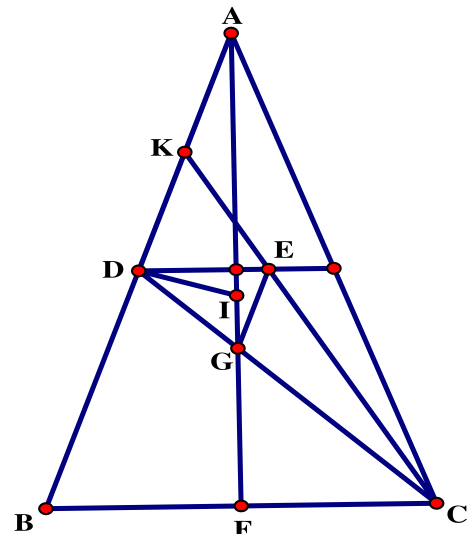
- Gọi F, H, K lần lượt là các trung điểm BC, AC, AD

$\Rightarrow E = DH \cap CK$.

- Do G là trọng tâm ΔABC $\Rightarrow G = AF \cap CD$
- Ta có $\dfrac{CE}{CK} = \dfrac{CG}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GE // AB$,

mà $AB \perp DI \Rightarrow GE \perp ID$

- Lại có $\left.\begin{matrix} DE // BC \\ GI \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow GI \perp DE \Rightarrow$ I là trực tâm ΔDGE



Tính chất 11: *"Trong 1 hình thang cân có 2 đường chéo vuông góc, độ dài đường cao bằng độ dài đường trung bình".*

Hướng dẫn chứng minh:

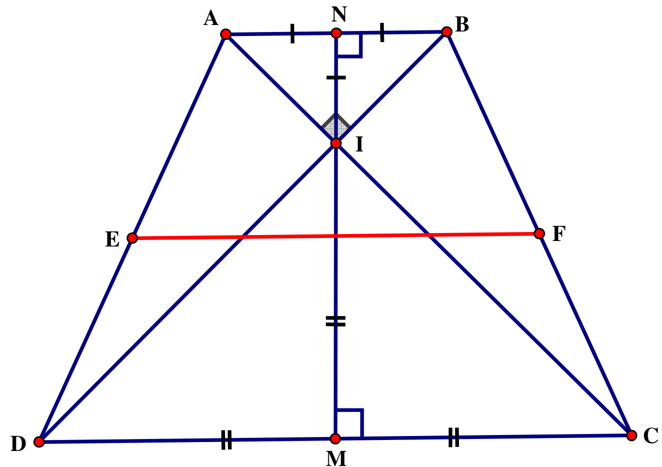
+ $NM = NI + IM$

+ Do ABCD là hình thang cân, $AC \perp BD$ tại I $\Rightarrow \Delta AIB, \Delta DIC$ vuông cân $\Rightarrow IN, IM$ là các đường cao tương ứng đồng thời là trung tuyến

$\Rightarrow NI = \dfrac{AB}{2}; IM = \dfrac{CD}{2}$

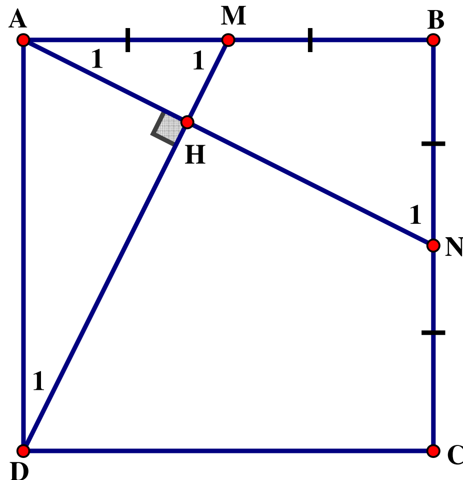
$\Rightarrow NI + IM = \dfrac{AB + CD}{2} = EF$

$\Rightarrow NM = EF$



Tính chất 12: Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của cạnh AB, BC của hình vuông ABCD $\Rightarrow AN \perp DM$

Hướng dẫn chứng minh:



+ Ta có $\Delta ABN = \Delta DAM (c-g-c) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1}$

+ Mà $\widehat{D_1} + \widehat{M_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{M_1} = 90^0 \Rightarrow \Delta AHM$ vuông tại H $\Rightarrow AN \perp DM$

Tính chất 13: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2.AD$, M là một điểm trên AB sao cho $AB = 4.AM \Rightarrow DM \perp AC$

Hướng dẫn chứng minh:

+ Ta có $\widehat{D_1} + \widehat{M_1} = 90^0$ (1)

+ Mà

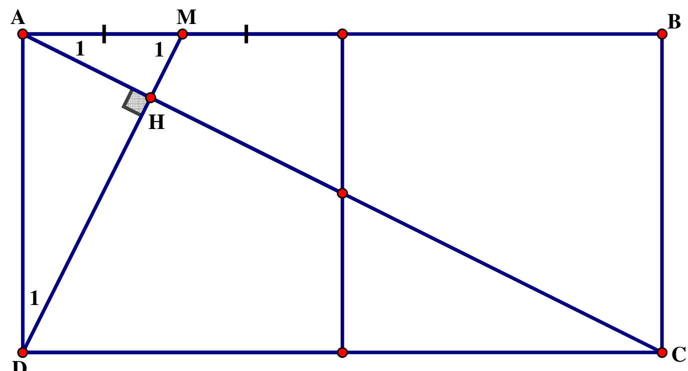
$\tan \widehat{A_1} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{2}, \tan \widehat{D_1} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{2},$

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1}$

+ Thay vào (1)

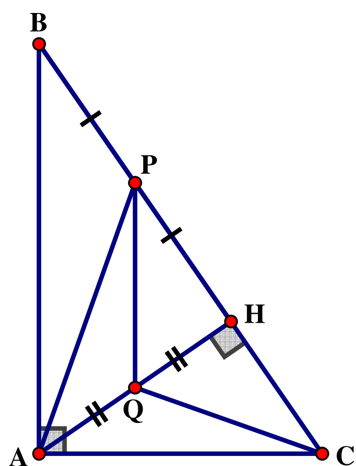
$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{M_1} = 90^0 \Rightarrow \Delta AHM$ vuông tại H

$\Rightarrow AC \perp DM$



Tính chất 14: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, AH $\Rightarrow AP \perp CQ$

Hướng dẫn chứng minh:



+ Ta có PQ là đường trung bình của ΔAHB $\Rightarrow PQ // AB$, mà $AB \perp AC \Rightarrow PQ \perp AC$

$\Rightarrow$ Q là trực tâm ΔAPC $\Rightarrow AP \perp CQ$

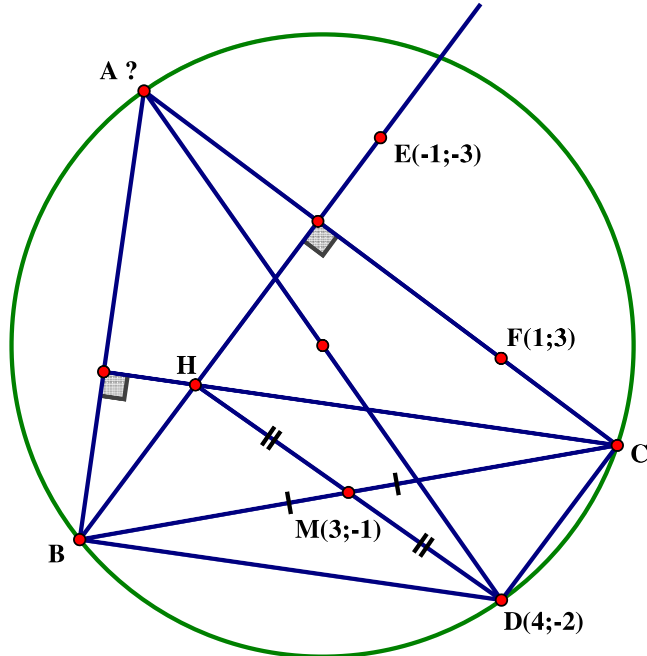
Còn nữa …

Phần 2

CÙNG THỰC HÀNH VỚI 36 BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1: ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính AD, $M(3;-1)$ là trung điểm cạnh BC. Đường cao kẻ từ B của ΔABC đi qua điểm $E(-1;-3)$, điểm $F(1;3)$ nằm trên đường thẳng AC. Tìm tọa độ đỉnh A và viết phương trình cạnh BC biết $D(4;-2)$

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Trước hết, khi gặp loại bài tập mà tam giác nội tiếp đường tròn, dữ kiện bài cho đường cao của tam giác thì ta thường nghĩ đến việc tạo ra 1 ***hình bình hành*** bằng cách:

- Nếu tam giác có 2 đường cao thì ta chỉ việc kẻ 1 đường kính đi qua đỉnh còn lại *(không chứa 2 đường cao kia).*
- Nếu tam giác có đường kính đi qua đỉnh và 1 đường cao thì ta sẽ kẻ đường cao thứ 2

(bài toán này ta sẽ làm như vậy)

+ Với bài toán này ta sẽ tạo ra điểm H là trực tâm ΔABC $\Rightarrow$ ta chứng minh được BHCD là hình bình hành ***(xem tính chất 2)***

+ Công việc chuẩn bị đã xong, bây giờ ta sẽ làm theo các bước suy luận sau nhé:

- Thấy ngay H là trung điểm AC $\Rightarrow H(2;0)$
- Lập được phương trình BH (qua 2 điểm H và E) $\Rightarrow BH: x-y-2=0$
- Lập được phương trình DC (qua D và // BH) $\Rightarrow DC: x-y-6=0$
- Lập được phương trình AC (qua F và $\perp BH$) $\Rightarrow AC: x+y-4=0$
- Tọa độ $C = AC \cap DC$, giải hệ $\Rightarrow C(5;-1)$
- Lập phương trình BC đi qua 2 điểm M và C $\Rightarrow BC: y+1=0$
- Lập phương trình AH (qua H và $\perp BC$) $\Rightarrow AH: x-2=0$
- Tọa độ $A = AH \cap AC$, giải hệ $\Rightarrow A(2;2)$

Bài 2: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (C), đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{A}$ cắt đường tròn (C) lần lượt tại $M(0;-3), N(-2;1)$. Tìm tọa độ các điểm B, C biết đường thẳng BC đi qua $E(2;-1)$ và C có hoành độ dương.

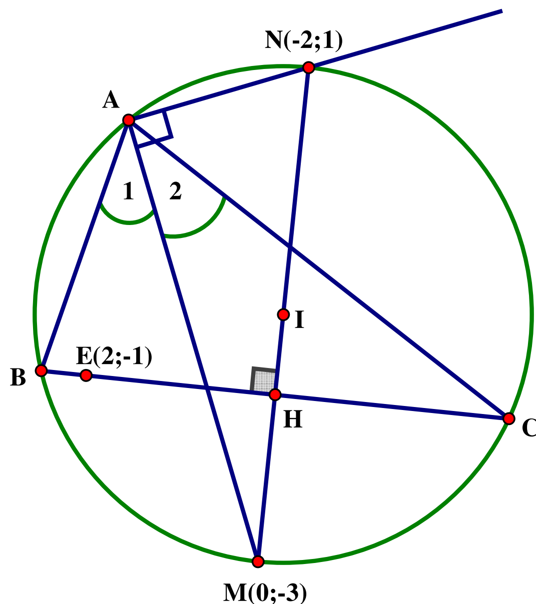
Hướng dẫn tìm lời giải

+ Trước hết ta thấy ngay $AN \perp AM$ *(t.c phân giác của 2 góc kề bù)* $\Rightarrow$ đường tròn (C) sẽ có tâm $I(-1;-1)$ là trung điểm MN, bán kính $R = \frac{MN}{2} = \sqrt{5} \Rightarrow (C): (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$

+ Như vậy đến đây thấy rằng để tìm tọa độ B, C ta cần thiết lập phương trình đường thẳng BC rồi cho giao với đường tròn (C).

+ Quan sát tiếp thấy BC qua E(2;-1) rồi, giờ thì ta cần tìm VTCP hoặc VTPT nữa là ổn đúng không !

Nếu vẽ hình chính xác thì ta sẽ dự đoán được $BC \perp MN$!!! *(ta sẽ chứng minh nhanh nhé:* $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MC} \Rightarrow$ *M là điểm chính giữa* $\overset{\frown}{BC} \Rightarrow H$ *là trung điểm BC* $(H = MN \cap BC)$ $\Rightarrow BC \perp MN$ *(q. hệ giữa đường kính và dây cung - hình học lớp 9))*



+ Như vậy, tóm lại, đường thẳng BC qua E, $\perp MN \Rightarrow BC: x - 2y - 4 = 0$

+ Cuối cùng, ta chỉ cần giải hệ phương trình gồm $(C) \cap BC \Rightarrow B(-2;-3), C\left(\frac{6}{5};-\frac{7}{5}\right)$

Bài 3: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O(0;0). Gọi M(-1;0, N(1;1) lần lượt là các chân đường vuông góc kẻ từ B, C của ΔABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của ΔABC, biết điểm A nằm trên đường thẳng Δ có phương trình : 3x + y - 1 = 0

Hướng dẫn tìm lời giải

+ Ta thấy $A \in \Delta \Rightarrow A(a;1-3a)$, bây giờ cần thiết lập 1 phương trình để tìm a.

+ Ta có $AO \perp MN$ ***(Tính chất 3)***

Giải phương trình :

$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{MN} = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A(1;-2)$

+ Đường thẳng AB đi qua A, N

$\Rightarrow AB: x - 1 = 0$

+ Đường thẳng AC đi qua A, M

$\Rightarrow AC: x + y + 1 = 0$

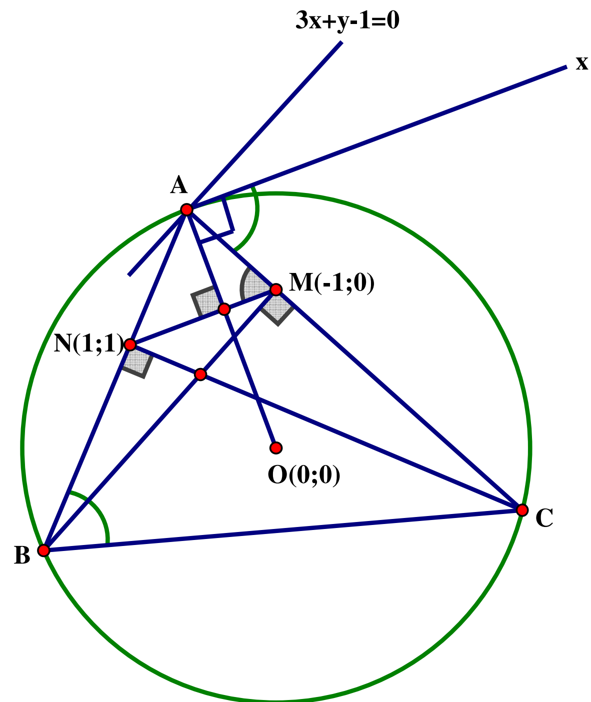
+ Đường cao BM đi qua M và

$\perp AC \Rightarrow BM: x - y + 1 = 0$

+ Tọa độ $B = AB \cap BM \Rightarrow B(1;2)$, tương tự

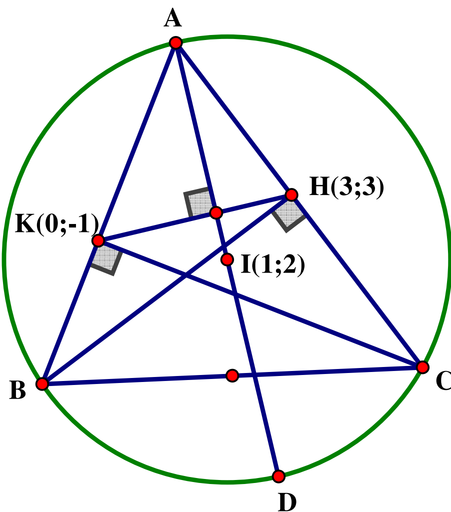
$\Rightarrow C(-2;1)$

Như vậy điểm quan trọng nhất đối với bài này là phát hiện ra $AO \perp MN$



Bài 4 : Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm I(1;2), bán kính R = 5. Chân đường cao kẻ từ B, C lần lượt là H(3;3), K(0;-1). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCHK, biết A có tung độ dương”

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Đường tròn (C) tâm I, bán kính R = 5 có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

+ Ta thấy ngay đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCHK có tâm M là trung điểm BC, đường kính BC (do $\widehat{BKC}=\widehat{BHC}=90^0$). Như vậy vấn đề quyết định của bài toán này là đi tìm tọa độ B, C.

+ Theo *tính chất 3* $AI\perp KH\Rightarrow$ AI là đt qua I, $AI\perp KH\Rightarrow AI$ có phương trình: $3x+4y-11=0$

+ Tọa độ $A=AI\cap(C)$, giải hệ có $A(-3;5)$

+ Đường thẳng AB đi qua A, K $\Rightarrow AB:2x+y+1=0$

+ Tọa độ $B=AB\cap(C)$, giải hệ có $B(1;-3)$, suy luận tương tự có $C(6;2)$

Vậy đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCHK có tâm M là trung điểm BC, đường kính BC có phương trình: $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

Bài 5: (KD-2014) Cho ΔABC nội tiếp đường tròn, D(1;-1) là chân đường phân giác của $\widehat{A}$, AB có phương trình $3x+2y-9=0$, tiếp tuyến tại A có phương trình $\Delta:x+2y-7=0$. Hãy viết phương trình BC.

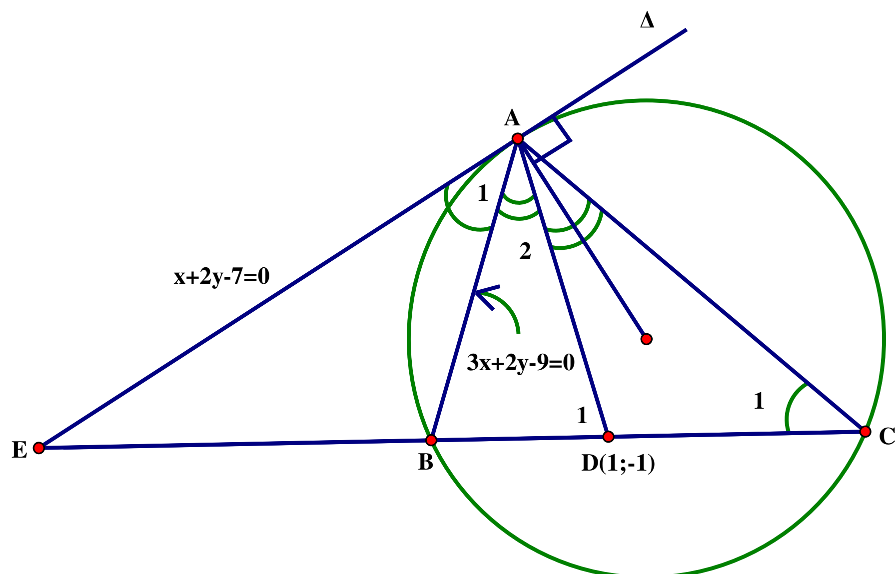
Hướng dẫn tìm lời giải

+ Với dữ kiện đề bài cho, trước hết ta xác định được ngay tọa độ $A=\Delta\cap AB\Rightarrow A(1;3)$

+ Đường thẳng BC đi qua D(1;-1) nên để lập phương trình BC ta cần tìm tọa độ một điểm nữa thuộc BC.

Gọi $E=\Delta\cap BC$ $\Rightarrow E\in\Delta\Rightarrow E(7-2x;x)$

+ Bây giờ cần thiết lập



1 phương trình để tìm x, vẽ hình chính xác sẽ cho ta dự đoán ΔEAD cân tại E $\Rightarrow$ giải phương trình ED = EA sẽ tìm được $x = 1 \Rightarrow E(5;1)$.

(chứng minh ΔEAD cân tại E như sau: $\widehat{D_1} = \widehat{C_1} + \widehat{DAC}$ (góc ngoài ΔADC), mà $\widehat{C_1} = \widehat{A_1} = \frac{sd\overset{\frown}{AB}}{2}$, $\widehat{DAC} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{EAD} \Rightarrow \Delta EAD$ cân tại E)

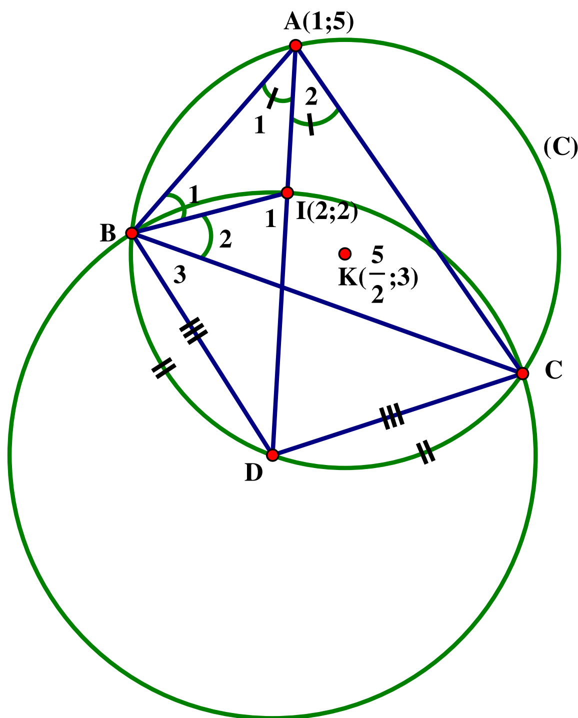
+ Đường thẳng BC đi qua 2 điểm E và D $\Rightarrow BC: x - 2y - 3 = 0$

Bài 6 : "Cho ΔABC có đỉnh $A(1;5)$. Tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp ΔABC lần lượt là $I(2;2), K\left(\frac{5}{2};3\right)$. Tìm tọa độ B, C"

Hướng dẫn tìm lời giải

Mỗi bài hình học tọa độ phẳng trong thi ĐH đều có một "nút thắt" riêng, làm thế nào để tìm được "nút thắt" đó và "cởi nút thắt". Câu trả lời là : Phải học nhiều, làm nhiều, chịu khó tổng hợp kiến thức và tư duy theo kinh nghiệm đã tích lũy .

SAU ĐÂY TA SẼ ĐI TÌM "NÚT THẮT" CỦA BÀI TOÁN LẦN TRƯỚC NHÉ !



+ Ta lập được ngay đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có tâm K, bán kính AK.

$\Rightarrow (C): \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4}$

+ Đường thẳng AI qua A, I

$\Rightarrow AI: 3x + y - 8 = 0 \Rightarrow D = AI \cap (C) \Rightarrow D\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$

+ Ta có: $BD = DI = CD$ ***(tính chất 7)***

$\Rightarrow$ B, C nằm trên đường tròn (T) tâm D, bán kính DI $\Rightarrow$ tọa độ B, C là giao của 2 đường tròn (C) và (T)

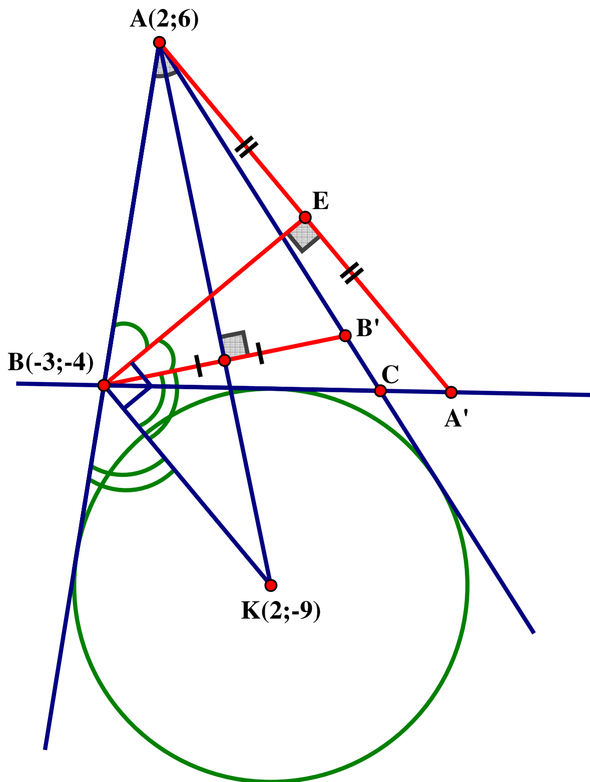
+ Như vậy đường tròn (T) tâm D, bán kính DI có phương trình:

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$

+ $\{B, C\} = (C) \cap (T) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(4;1), C(1;1) \\ B(1;1), C(4;1) \end{array}\right.$

Bài 7: Cho ΔABC có tâm đường tròn bàng tiếp của góc A là $K(2;-9)$, đỉnh $B(-3;-4), A(2;6)$. Tìm tọa độ đỉnh C

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Ta thấy $C = AC \cap BC$, vậy ta cần đi tìm phương trình đường thẳng AC và BC

* Bước 1: Tìm phương trình AC

- Đường thẳng AC đi qua A và B' *(trong đó B'(7;4) là điểm đối xứng của B qua phân giác AK: x - 2 = 0)*

$\Rightarrow AC: 2x + 5y - 34 = 0$

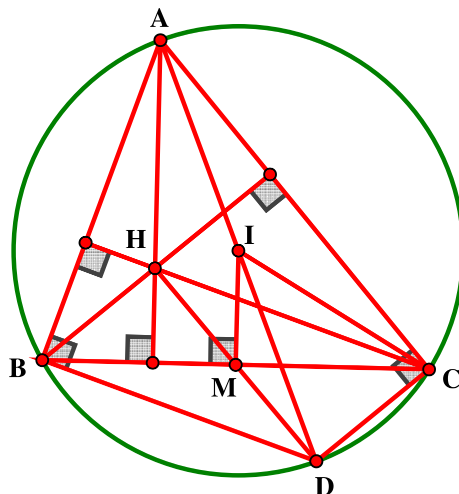
(Trong quá trình học ta đã có được kinh nghiệm: khi gặp đường phân giác và 1 điểm, ta sẽ lấy điểm đối xứng qua đường phân giác - hy vọng bạn còn nhớ)

* Bước 2: Tìm phương trình BC

Suy luận tương tự ta cũng có: Đường thẳng BC đi qua B và A' (trong đó A' là điểm đối xứng của A qua phân giác BE)

+ Giải hệ $C = AC \cap BC$. Đáp số C(5;0)

Bài 8: ΔABC nội tiếp đường tròn tâm I(2;1), bán kính R = 5. Trực tâm H(-1;-1), độ dài BC = 8. Hãy viết phương trình BC



Hướng dẫn tìm lời giải

+ Đây là 1 bài toán quen thuộc "tam giác nội tiếp đường tròn, cho biết trực tâm", vậy ta sẽ nghĩ ngay đến việc tạo ra hình bình hành bằng cách kẻ đường kính AD $\Rightarrow$ BHCD là hình bình hành *(xem lại **tính chất 2**)* $\Rightarrow$ MI là đường trung bình của ΔAHD

$\Rightarrow AH = 2.MI$ (một kết quả rất quen thuộc)

+ Với các suy luận trên, ta sẽ tìm được tọa độ A trước tiên. Thật vậy, gọi A(x;y)

Ta có: $\begin{cases} AH = 2.IM = 2.\sqrt{CI^2 - BM^2} = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6 \\ AI = 5 \end{cases}$,

giải hệ này

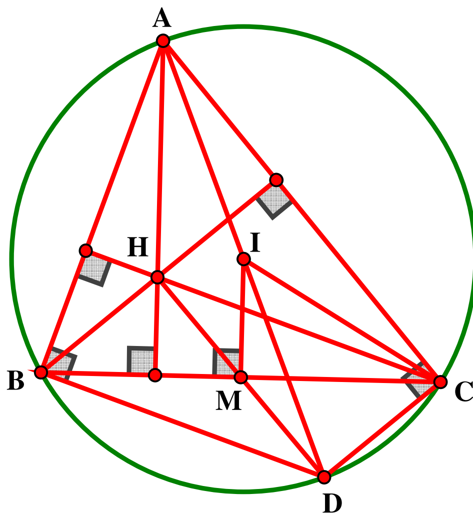
$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(-1;5) \Rightarrow D(5;-3) \Rightarrow M(2;-2)$ (do I là trung điểm AD, M là trung điểm HD)

+ Như vậy, sau khi có điểm A, M ta thấy đường thẳng BC đi qua M, vuông góc với AH

$\Rightarrow BC: y + 2 = 0$

Bài 9: ΔABC nội tiếp đường tròn tâm I(-2;0), A(3;-7), trực tâm H(3;-1). Xác định tọa độ C biết C có hoành độ dương.

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Hoàn toàn với phương pháp lập luận như bài trên, ta cũng có được kết quả $AH = 2.MI \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2.\overrightarrow{IM}$, nếu gọi M(x;y) thì giải phương trình $\overrightarrow{AH} = 2.\overrightarrow{IM}$

$\Rightarrow x = -2, y = 3 \Rightarrow M(-2;3)$

+ Đường thẳng BC đi qua điểm M, vuông góc với AH $\Rightarrow BC: y - 3 = 0$

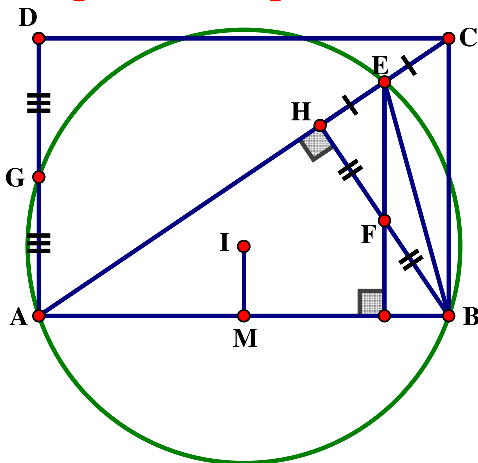
+ Đường tròn (C) tâm I, bán kính R = IA có phương trình : $(x+2)^2 + y^2 = 74$

+ Tọa độ B, C là giao của BC và (C), giải hệ ta sẽ có $C\left(-2+\sqrt{65};3\right)$ (chú ý $x_C > 0$ nhé)

Như vậy qua bài toán trên, các bạn cần ghi nhớ 1 kết quả quan trọng sau: Nếu H, I lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, *M là trung điểm BC thì ta có:* $\overrightarrow{AH} = 2.\overrightarrow{IM}$ *(đây là điểm nút của vấn đề). Tiếp theo mạch tư tưởng đó, ta nghiên cứu bài sau cũng có cách khai thác tương tự.*

Bài 10: Cho hình chữ nhật ABCD, qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại H. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CH, BH và AD. Biết $E\left(\frac{17}{5};\frac{29}{5}\right);F\left(\frac{17}{5};\frac{9}{5}\right),G(1;5)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABE

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Đây là bài toán phát triển theo mạch tư duy của dạng bài trên

+ ΔABE có F là trực tâm, vậy nếu gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABE, M là trung điể AB thì ta đã chứng minh được $\overrightarrow{EF} = 2.\overrightarrow{IM}$ *(xem lại bài ở trên)*

Do tọa độ E, F đã biết, vậy để có I ta cần tìm tọa độ M, mà M là trung điểm AB nên ta cần tìm tọa độ A, B. *(đây là điểm nút của bài toán này)*

+ Ta thấy ngay EF là đường trung bình của $\Delta HCB \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{FE}$. Như vậy nếu gọi A(x;y) thì giải phương trình $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{FE} \Rightarrow x = 1; y = 1 \Rightarrow A(1;1)$

+ Tiếp theo lập được phương trình đt AE đi qua A, E $\Rightarrow AE: -2x + y + 1 = 0$

+ Đường thẳng AB qua A và vuông góc với EF $\Rightarrow AB: y - 1 = 0$

+ Đường thẳng BH qua F và vuông góc với AE $\Rightarrow BH: x + 2y - 7 = 0$

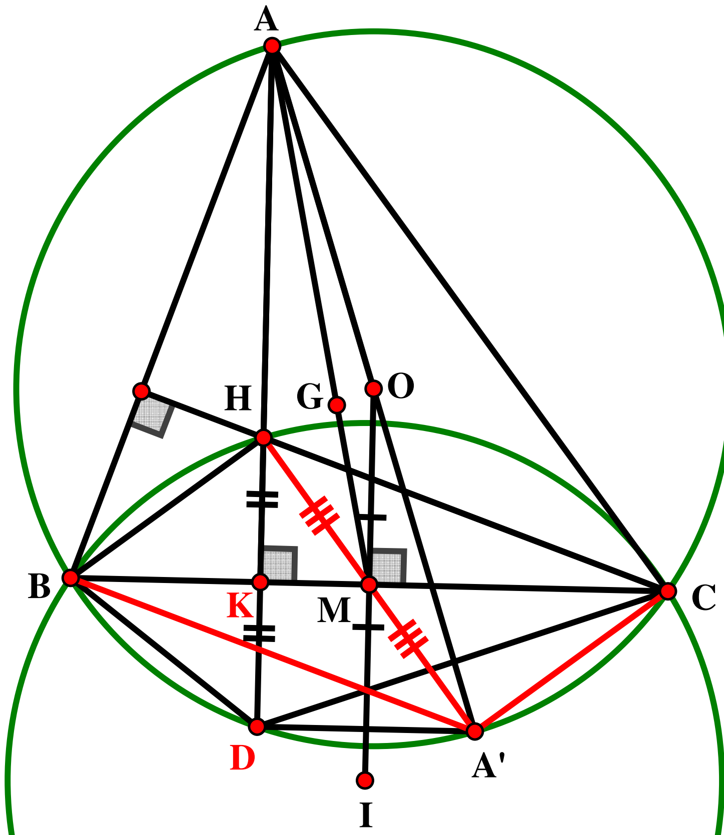
$\Rightarrow B = BH \cap AB \Rightarrow B(5;1) \Rightarrow M(3;1)$

+ Giải phương trình $\overrightarrow{EF} = 2.\overrightarrow{IM} \Rightarrow I(3;3)$

Bài 11: Cho ΔABC có trực tâm H, đường tròn ngoại tiếp ΔHBC có phương trình $(x+1)^2+y^2=9$. Trọng tâm G của ΔABC thuộc Oy. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC biết BC có phương trình $x-y=0$ và B có hoành độ dương.

Hướng dẫn tìm lời giải

+ Trước hết ta có tọa độ B, C là giao điểm của đường tròn $(x+1)^2+y^2=9$ (C) và đường thẳng BC : $x-y=0$.



Giải hệ phương trình

$\Rightarrow B\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$;

$C\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$

+ Bây giờ việc khó khăn sẽ là tìm tọa độ A(x;y) theo trình tự suy luận sau:

- Điểm G(0;a) thuộc Oy là trọng tâm ΔABC, sử dụng công thức trọng tâm $\Rightarrow A(-1;y)$

- Gọi O và I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $\Delta HBC \Rightarrow$ I và O đối xứng nhau qua BC (*) ***(tính chất 4)*** , từ đây ta lập được phương trình OI qua I(-1;0) và vuông góc BC $\Rightarrow OI: x+y+1=0$.

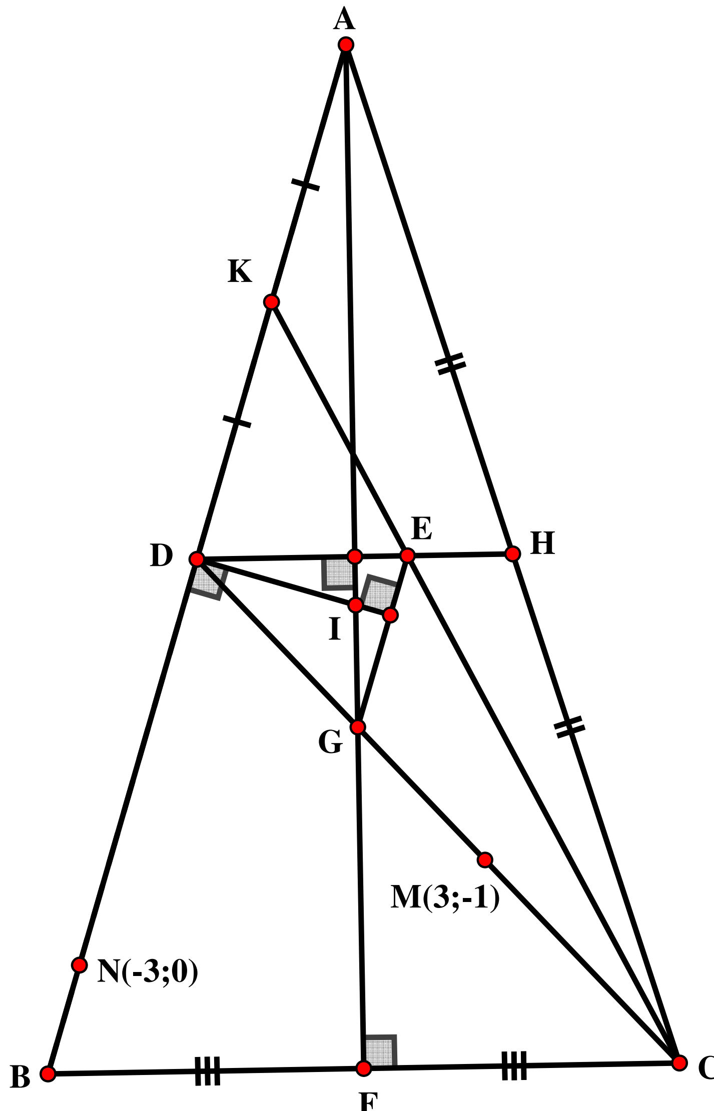
- Ta có, tọa độ

$M=OI\cap BC \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow O(0;-1)$

- Mặt khác OA = 3 *(bằng với bán kính đường tròn (C))* - do đường tròn tâm O và đường tròn tâm I đối xứng nhau qua BC nên bán kính bằng nhau. Giải phương trình $OA=3\Rightarrow A\left(1;-1+2\sqrt{2}\right)$ hoặc $A\left(1;-1-2\sqrt{2}\right)$

Bài 12: ΔABC cân tại A, gọi D là trung điểm của AB, D có tung độ dương, điểm $I\left(\frac{11}{3};\frac{5}{3}\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Điểm $E\left(\frac{13}{3};\frac{5}{3}\right)$ là trọng tâm ΔADC. Điểm $M(3;-1)\in DC, N(-3;0)\in AB$. Tìm tọa độ A, B, C

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Ta có *I là trực tâm* ΔDGE ***(tính chất 10)***

+ Do đó ta viết phương trình DC đi qua M và vuông góc với EI

$\Rightarrow DC: x-3=0$

+ Tiếp theo ta tìm tọa độ D : do $D \in DC \Rightarrow D(3;x)$, giải phương trình $\overrightarrow{DN}.\overrightarrow{DI}=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow D(3;3)$

+ Ta sẽ viết tiếp phương trình AB (qua N, D)

$\Rightarrow AB: x-2y+3=0$

+ Đường thẳng AF qua I và vuông góc với DE

$\Rightarrow AF: x-y-2=0$

+ Giải hệ

$A = AB \cap AF \Rightarrow A(7;5) \Rightarrow B(-1;1)$

(do D là trung điểm AB)

+ Đường thẳng BC qua B và vuông góc với IA

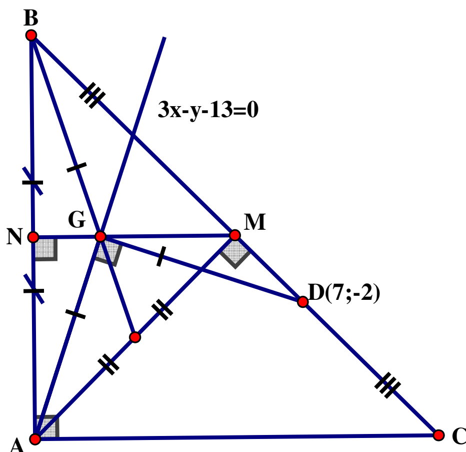
$\Rightarrow BC: x+y=0$

+ Giải hệ

$C = BC \cap CD \Rightarrow C(3;-3)$

(Lưu ý là đường thẳng CD đi qua M và D - bạn tự viết nhé)

Bài 13: Cho ΔABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC. G là trọng tâm ΔABM, điểm D(7;-2) là điểm nằm trên đoạn MC sao cho $GA = GD$. Tìm tọa độ điểm A, lập phương trình AB, biết hoành độ của A nhỏ hơn 4 và AG có phương trình 3x - y - 13 = 0



Hướng dẫn tìm lời giải

Bước 1: Tìm tọa độ A

+ Ta tính được ngay khoảng cách $d(D;AG) = \sqrt{10}$

+ $A \in AG \Rightarrow A(a;3a-13)$

+ Ta có gọi N là trung điểm AB, do ΔBMA vuông cân tại M nên NM là đường trung trực của AB

$\Rightarrow GA = GB$, mà $GA = GD(gt) \Rightarrow GA = GB = GD \Rightarrow$ G là tâm đường tròn ngoại tiếp

$\Delta ABD \Rightarrow \widehat{AGD} = 2.\widehat{ABD} = 90^0$ (liên hệ giữa góc ở tâm và góc nội tiếp trong đường tròn tâm G ngoại

tiếp ΔABD) ΔAGD vuông cân tại G $\Rightarrow AD^2 = 2.DG^2 = 2.10 = 20$ (giải thích chút xíu: ΔAGD vuông tại G $\Rightarrow d(D;AG) = DG = \sqrt{10}$).

Giải phương trình $AD^2 = 20 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 > 4 \\ a = 3 \Rightarrow A(3;-4) \end{array}\right.$

Bước 2: Lập phương trình đường thẳng AB

Đường thẳng AB không dễ gì lập được nên trong TH này ta sẽ dựa vào góc giữa 2 đường thẳng để giải quyết.

+ Gọi VTPT của đường thẳng AB là $\vec{n}_{AB} = (a;b)$, đường thẳng AG có VTPT là $\vec{n}_{AG} = (3;-1)$

+ Ta có $\cos\widehat{NAG} = \left|\cos\left(\vec{n}_{AB};\vec{n}_{AG}\right)\right| = \dfrac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}}$

+ Mặt khác $NG = \dfrac{1}{3}NM = \dfrac{1}{3}NA, AG = \sqrt{NA^2+NG^2} = \sqrt{(3.NG)^2+NG^2} = NG.\sqrt{10}$

$\Rightarrow \cos\widehat{NAG} = \dfrac{NA}{AG} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \dfrac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

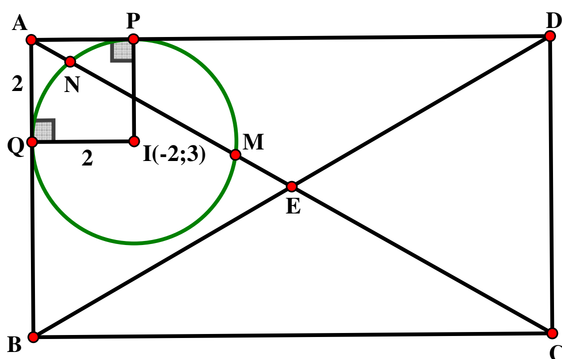
$\Rightarrow 6ab + 8b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 3a = -4b \end{array}\right.$

- Với b = 0, chọn a = 1 $\Rightarrow AB: x - 3 = 0$
- Với 3a = -4b, chọn a = 4, b = - 3 $\Rightarrow AB: 4x - 3y - 24 = 0$

* Nhận thấy nếu AB có phương trình $4x - 3y - 24 = 0$ thì $d(A;AB) < \sqrt{10} \Rightarrow$ G nằm ngoài ΔABC (loại)

Bài 14: Cho hình chữ nhật ABCD có AB, AD tiếp xúc với đường tròn (C) có phương trình : $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$, đường thẳng AC cắt (C) tại $M\left(-\dfrac{16}{5};\dfrac{23}{5}\right)$ và N, với $N \in Oy$. Biết $S_{\Delta AND} = 10$. Tìm tọa độ A, B, C, D biết A có hoành độ âm, D có hoành độ dương.

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Công việc chuẩn bị: theo đề bài ta thì đường tròn (C) có tâm $I(-2;3), R = 2, N(0;3) \in Oy$

+ Lập được ngay phương trình AC (đi qua N và M) : $x + 2y - 6 = 0$

+ $A \in AC \Rightarrow A(6-2a;a)$, chứng minh được APIQ là hình vuông (P, Q là tiếp điểm của AD, AB với (C))

$\Rightarrow AI = \sqrt{AQ^2+QI^2} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$.

Giải phương trình này $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \Rightarrow A(-4;5) \\ a=\frac{13}{5} \Rightarrow A\left(\frac{4}{5};\frac{13}{5}\right), x_A>0 \end{array}\right.$

+ Gọi VTPT của AD là $\vec{n}=(m;n) \Rightarrow AD: m(x+4)+n(y-5)=0 \Leftrightarrow mx+ny+4m-5n=0$

Mà $d(I;AD)=2 \Rightarrow ... \Rightarrow 2mn=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \Rightarrow AD: y-5=0 \Rightarrow D(d;5) \\ n=0 \Rightarrow AD: x+4=0 \Rightarrow x_D=-4<0 \end{array}\right.$

+ Lại có $S_{\Delta AND}=10 \Rightarrow \frac{1}{2}.AD.d(N;AD)=10 \Rightarrow ... \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=6 \Rightarrow D(6;5) \\ d=-14<0 \end{array}\right.$

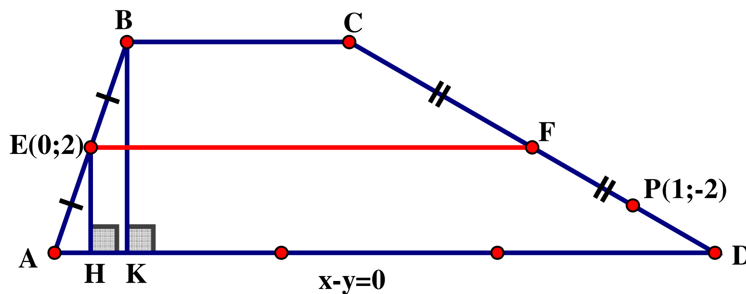
+ Như vậy tiếp theo sẽ lập được phương trình DC đi qua A và D $\Rightarrow DC: x-6=0$

$\Rightarrow C=AC\cap CD$, giải hệ $\Rightarrow C(6;0)$

+ Chỉ còn tọa độ điểm B cuối cùng: bây giờ gọi $E=AC\cap BD \Rightarrow$ E là trung điểm của AC và BD $\Rightarrow E\left(1;\frac{5}{2}\right) \Rightarrow B(-4;0)$

Bài 15: Cho hình thang ABCD có đáy AD // BC, $AD=3.BC$. Phương trình đường thẳng AD là $x-y=0$. Điểm E(0;2) là trung điểm của AB, điểm P(1;-2) nằm trên đường thẳng CD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang, biết hình thang có diện tích bằng 9 và điểm A, D có hoành độ dương.

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Đường thẳng EF đi qua E và // AD $\Rightarrow EF: x-y+2=0$

+ Ta có $BK=2.EH=2.d(E;AD)=...=2\sqrt{2}$

+ Mặt khác

$S_{ABCD}=9 \Leftrightarrow \frac{BC+AD}{2}.BK=9 \Leftrightarrow EF.BK=9 \Leftrightarrow EF=\frac{9}{2\sqrt{2}}$

+ Điểm $F\in EF \Rightarrow F(x;2+x)$, giải phương trình $EF=\frac{9}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x=\pm\frac{9}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} F\left(\frac{9}{4};\frac{17}{4}\right) \\ F\left(-\frac{9}{4};-\frac{1}{4}\right) \end{array}\right.$

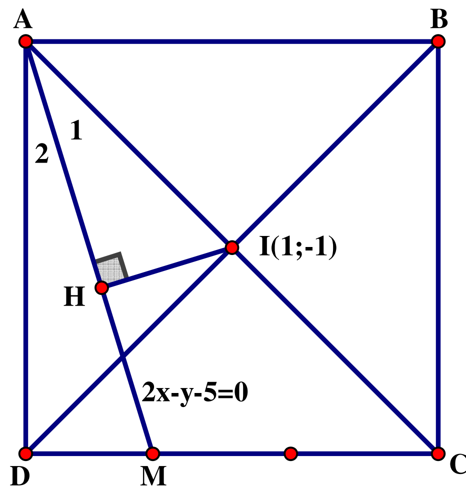
*** TH1:** $F\left(\frac{9}{4};\frac{17}{4}\right)$, ta lập được đường thẳng CD đi qua 2 điểm F, P $\Rightarrow CD: -5x+y+7=0$

$\Rightarrow D=CD\cap AD$, giải HPT $\Rightarrow D\left(\frac{7}{4};\frac{7}{4}\right) \Rightarrow C\left(\frac{11}{4};\frac{27}{4}\right)$ (do F là trung điểm CD)

*** TH2:** Các bạn tự làm tương tự nhé.

Bài 16: Cho hình vuông ABCD có tâm I(1;-1) và điểm M thuộc CD sao cho $MC=2.MD$. Đường thẳng AM có phương trình $2x-y-5=0$. Tìm tọa độ đỉnh A.

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Trước hết ta tính được ngay

$IH = d(I;AM) = ... = \frac{2}{\sqrt{5}}$

+ Do $A \in AM \Rightarrow A(x;2x-5)$, vấn đề bây giờ là phải thiết lập 1 phương trình để tìm x !!!

+ Ta thấy ΔAIH vuông tại H, nếu tính được AI (hoặc AH) thì sẽ có được phương trình ẩn x. Thật vậy, em hãy quan sát suy luận sau đây:

- Em sẽ chứng minh được

$$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 45^0 \Rightarrow \tan\left(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\tan\widehat{A_1} + \tan\widehat{A_2}}{1 - \tan\widehat{A_1}.\tan\widehat{A_2}} = 1 \ (*)$$

- Mà $\tan\widehat{A_2} = \frac{DM}{AD} = \frac{1}{3}$, thay vào (*) $\Rightarrow \tan\widehat{A_1} = \frac{1}{2}$

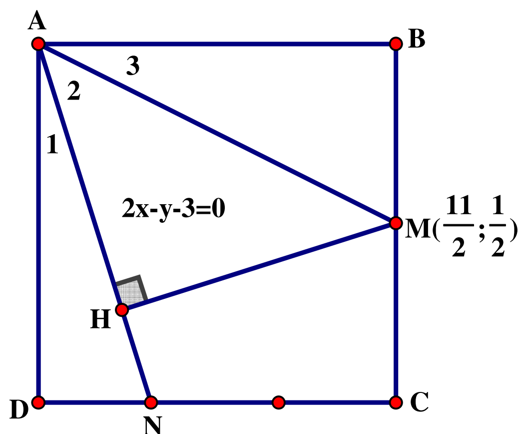
- Lại có: ΔAIH vuông tại H $\Rightarrow \tan\widehat{A_1} = \frac{IH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow AI = \sqrt{AH^2 + IH^2} = 2$

- Bây giờ giải phương trình AI = 2 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{13}{5} \Rightarrow A\left(\frac{13}{5};\frac{1}{5}\right) \\ x = 1 \Rightarrow A(1;-3) \end{array}\right.$

Bây giờ chúng ta cùng xem lại đề thi khối A-2012 có cách khai thác làm tương tự (trong khi đó đáp án của BGD rất khó hiểu)

Bài 17: (KA-2012) Cho hình vuông ABCD, M là trung điểm BC. N thuộc CD sao cho CN = 2.ND. Điểm $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$, $AN: 2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ của A.

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Do $A \in AN \Rightarrow A(x;2x-3)$

+ Tính được ngay khoảng cách

$AH = d(M;AN) = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

+ Bây giờ ta cần tính đoạn AM để thiết lập phương trình tìm x như sau:

- Ta có

$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A_2} = 90^0 - \left(\widehat{A_1} + \widehat{A_3}\right)$

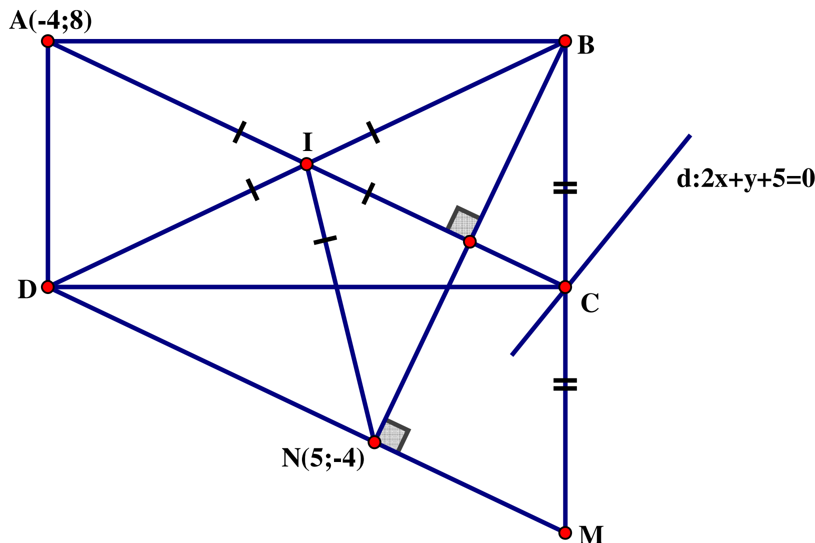
$\Rightarrow \cot\widehat{A_2} = \cot\left[90^0 - \left(\widehat{A_1} + \widehat{A_3}\right)\right] = \tan\left(\widehat{A_1} + \widehat{A_3}\right)$

$$\Rightarrow \cot\widehat{A_2} = \frac{\tan\widehat{A_1} + \tan\widehat{A_3}}{1 - \tan\widehat{A_1}.\tan\widehat{A_3}} = \frac{\frac{DN}{AD} + \frac{BM}{AB}}{1 - \frac{DN}{AD}.\frac{BM}{AB}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}.\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{A_2} = 45^0$$

- Xét ΔAHM vuông tại H $\Rightarrow AM = \frac{HM}{\sin 45^0} = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$

- Giải phương trình $AM = 3\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = ? \Rightarrow A\,?$

Bài 18: (KA-2013) Cho hình chữ nhật ABCD có M đối xứng với B qua C. Điểm $N(5;-4)$ là hình chiếu vuông góc của B trên DM. Điểm C nằm trên đường thẳng $2x + y + 5 = 0, A(-4;8)$. Tìm tọa độ của B và C.



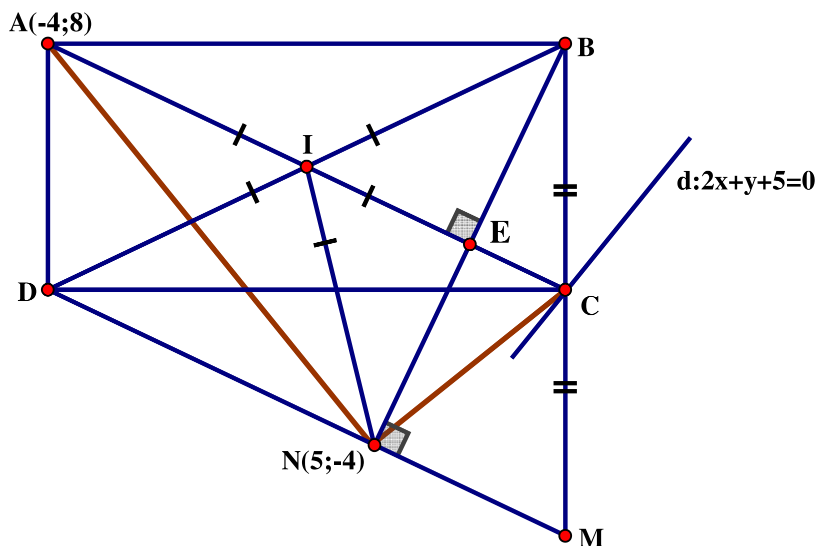
Hướng dẫn tìm lời giải

+ Điểm $C \in d \Rightarrow C(x;-2x-5)$

+ Gọi I là tâm hình chữ nhật ABCD $\Rightarrow$ I là trung điểm AC $\Rightarrow I\left(\frac{x-4}{2};\frac{-2x+3}{2}\right)$

+ Ta dễ dàng chứng minh được $IN = IA$, giải phương trình này $\Rightarrow x = 1 \Rightarrow C(1;-7)$

+ Đến đây ta sẽ lập được phương trình AC (đi qua 2 điểm A và C), điểm B là điểm đối xứng của N qua AC $\Rightarrow B(-4;-7)$



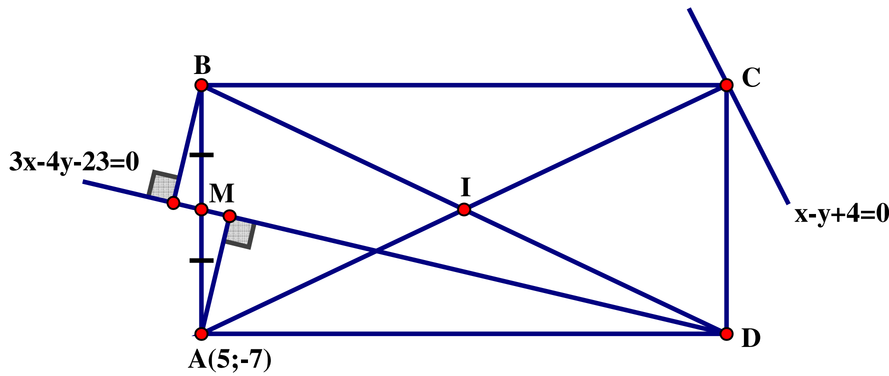
Cách khác:

+ Điểm $C \in d \Rightarrow C(x;-2x-5)$, vẽ hình chính xác, dự đoán được ngay rằng: $AN \perp NC \Rightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{NC} = 0$, giải phương trình này sẽ $\Rightarrow x \Rightarrow C$ (Ta chứng minh $AN \perp NC$ như sau: Chứng minh ADMC là hình bình hành $\Rightarrow AC \perp NB$. Trong ΔANM có C là trung điểm BM, EC // NM $\Rightarrow$ E là trung điểm BN $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ANC \Rightarrow \widehat{ANC} = 90^0$)

+ Để tìm tọa độ B ta giải hệ $\begin{cases} B \in BN \\ BC = CN \end{cases}$ (trong đó BN là đường thẳng qua N và vuông góc với AC)

Bài 19: Cho hình chữ nhật ABCD, $A(5;-7), C \in d: x - y + 4 = 0$. Đường thẳng đi qua D và trung điểm M của AB có phương trình $\Delta: 3x - 4y - 23 = 0$. Tìm tọa độ B, C biết $x_B > 0$

Hướng dẫn tìm lời giải



+ $C \in d \Rightarrow C(x; x+4)$

+ Do M là trung điểm AB $\Rightarrow d(C;\Delta) = 2.d(A;\Delta)$, giải phương trình này $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow C(1;5) \\ x = -79 < 0 \end{array}\right.$

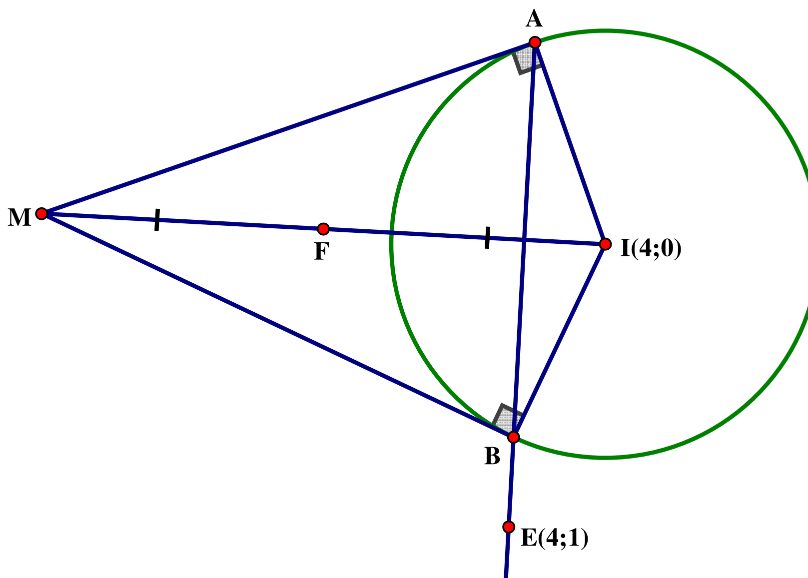
+ Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M\left(m; \dfrac{2m-23}{4}\right)$, mà M là trung điểm AB $\Rightarrow B\left(2m-5; \dfrac{3m-9}{2}\right)$

+ Gọi I là tâm hình chữ nhật $\Rightarrow I(3;-1)$ là trung điểm AC, I còn là trung điểm BD $\Rightarrow$ từ đây ta sẽ biểu diễn được tọa độ của D thông qua ẩn m. Lại có D thuộc Δ nên giải phương trình $D \in \Delta \Rightarrow B\left(\dfrac{33}{5}; \dfrac{21}{5}\right)$

Bài 20: Cho đường tròn $(C): (x-4)^2 + y^2 = 4$. Tìm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (C) (A, B là 2 tiếp điểm). Biết AB đi qua E(4;1)

Hướng dẫn tìm lời giải

Bài tập này sẽ cung cấp cho các bạn 1 phương pháp lập phương trình đường thẳng dựa theo ý tưởng quỹ tích.



+ Do $M \in Oy \Rightarrow M(0;m)$

+ Đường tròn (C') ngoại tiếp tứ giác MAIB có tâm $F\left(2; \dfrac{a}{2}\right)$ là trung điểm MI, bán kính $R' = \dfrac{MI}{2} = \dfrac{\sqrt{16+a^2}}{2}$

$\Rightarrow (C'): (x-2)^2 + \left(y - \dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{16+a^2}{4}$

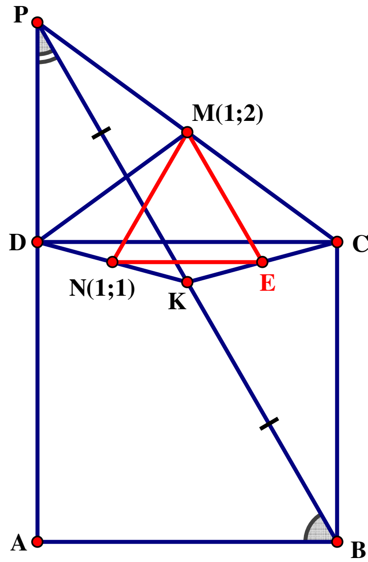
+ Ta có tọa độ A, B là giao của (C) và (C') là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 = 4 \\ (x-2)^2 + \left(y - \dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{16+a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow -4x + ay + 12 = 0$$

+ Từ đây suy ra AB có phương trình $-4x + ay + 12 = 0$, mà E thuộc AB $\Rightarrow m = 4 \Rightarrow M(0;4)$

Bài 21: Cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia DA lấy điểm P sao cho $\widehat{ABP} = 60^0$. Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm BP, CP, KD. Tìm tọa độ D biết tọa độ M(1;2), N(1;1)

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Đây là loại bài toán mà hình không có phương trình các cạnh nên ta sử dụng phương pháp tính ra độ dài cạnh hình vuông. Nếu gọi cạnh hình vuông là x, ta có:

- Đoạn MN có độ dài bằng 1.
- Gọi E là trung điểm CK

$\Rightarrow ME // PB; ME = \frac{1}{2}PK = \frac{1}{4}PB; \widehat{MEN} = \widehat{PBA} = 60^0$

- ΔPAB vuông tại A, $\widehat{PBA} = 60^0 \Rightarrow PB = 2x \Rightarrow ME = \frac{x}{2}$, mà $NE = \frac{DC}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow \Delta MEN$ đều $\Rightarrow MN = ME = NE = 1 \Rightarrow x = 2$

+ Như vậy ta đã tính được cạnh hình vuông bằng 2, ta sẽ đi suy luận để tìm tọa độ D

- Gọi D(a;b), mà đề bài cho 2 điểm M, N biết tọa độ rồi, vì vậy hướng suy nghĩ tiếp theo là đi tính DN và DM như sau:

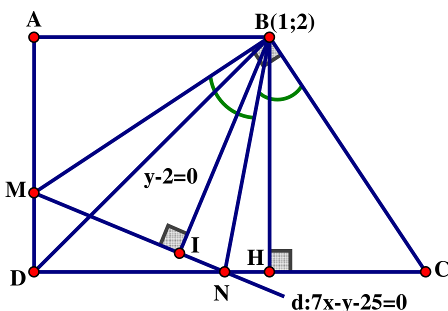
- Ta có $DN = \frac{DK}{2}$, để ý rằng ΔDPK có $\widehat{DPK} = 30^0, PK = \frac{PB}{2} = 2$, vậy cần tính PD để áp dụng định lý hàm số cos trong ΔDPK thì sẽ tính được DK.

Ở đây $PD = AP - AD = \sqrt{PD^2 - AB^2} - AD = 2\sqrt{3} - 2$, quay trở lại để áp dụng định lý hàm số cos trong $\Delta DPK \Rightarrow DK \Rightarrow DN = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ (1)

- Ta có $DM = \frac{PC}{2} = \frac{\sqrt{PD^2 + DC^2}}{2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$ (2)

+ Cuối cùng, giải hệ phương trình gồm (1) và (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} D\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ D\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}\right.$

Bài 22: Cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và D có $AB = AD < CD, B(1;2)$, đường thẳng BD có phương trình $y = 2$. Biết đường thẳng $d: 7x - y - 25 = 0$ cắt đoạn thẳng AD, CD lần lượt tại M và N sao cho $BM \perp BC$ và tia BN là tia phân giác của $\widehat{MBC}$. Tìm tọa độ điểm D, biết D có hoành độ dương.



Hướng dẫn tìm lời giải

+ Ta có $d(B;d) = ... = 2\sqrt{2}$

+ Ta có $\Delta BMN = \Delta BNC$ (do BN chung, $\widehat{MBN} = \widehat{CBN}; BM = BC$ (do $\Delta BAM = \Delta BHC$)

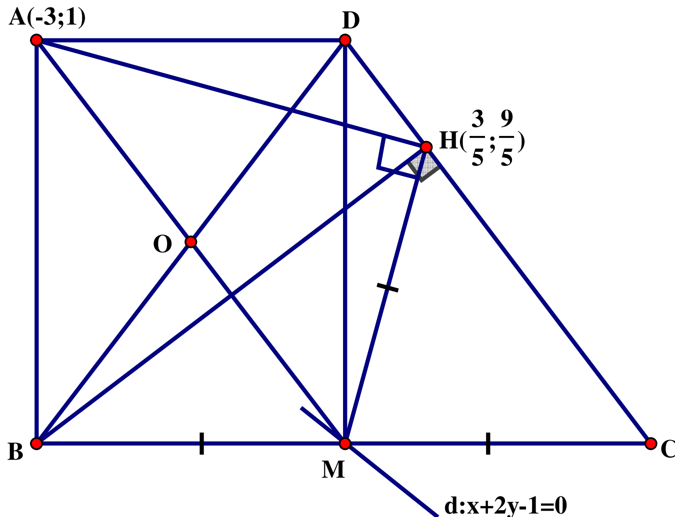
$\Rightarrow BI = BH = 2\sqrt{2}$ *(2 đường cao tương ứng của 2 tam giác bằng nhau)*

$\Rightarrow BD = BH.\sqrt{2} = 4$ (do ΔBDH vuông cân tại H)

+ Do $D \in BD \Rightarrow D(b;2)$, giải phương trình $BD = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = -3 < 0 \\ d = 5 \Rightarrow D(5;2) \end{array}\right.$

Bài 23: Cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và B có $BC = 2.AD, H\left(\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của B lên CD. Xác định tọa độ các điểm B, D của hình thang, biết $A(-3;1)$, trung điểm BC là điểm M nằm trên đường thẳng $x + 2y - 1 = 0$

Hướng dẫn tìm lời giải



+ $M \in d \Rightarrow M(1-2x;x)$

+ Do ADMB là hình chữ nhật $\Rightarrow$ tứ giác ADMB nội tiếp đường tròn đường kính DB, mà $\widehat{DHB} = 90^0 \Rightarrow$ H thuộc đường tròn đường kính DB

$\Rightarrow$ 5 điểm A, D, H, M, B nằm trên đường tròn đường kính DB $\Rightarrow$ tứ giác AHMB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHM} = 90^0$ (do $\widehat{ABM} = 90^0$)

Đến đây ta giải phương trình $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HM} = 0 \Rightarrow M(1;0)$

+ Mà AM // DC (do ADMC là hình bình hành) $\Rightarrow$ đường thẳng DC đi qua H và song song với AM $\Rightarrow DC: 5x + 20y - 39 = 0$

+ Ta có $O\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm AM, giải tiếp hệ

$$\begin{cases} D \in DC \\ OD = OA \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D\left(-\frac{9}{5};\frac{12}{5}\right) \Rightarrow B\left(-\frac{1}{5};-\frac{7}{5}\right) \\ D\left(\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right) \Rightarrow B\left(-\frac{13}{5};-\frac{4}{5}\right) \end{array}\right.$$

Bài 24: Cho hình vuông ABCD có $A(3;4)$. Gọi M, N là các trung điểm AD và DC. E là giao điểm BN và CM. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔBME, biết BN có phương trình $x - 3y + 1 = 0$ và điểm B có tọa độ nguyên.

Hướng dẫn tìm lời giải

+ Trước hết, quan sát hình vẽ ta thấy đối với bài tập dạng này, ta sẽ chứng minh được $MC \perp BN \Rightarrow \Delta BEM$ vuông tại E *(bạn tự chứng minh điều này nhé vì chúng ta làm vài lần rồi)* $\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp ΔBEM có tâm I là trung điểm MB, bán kính R = IB.

Như vậy điểm quyết định là phải tìm được tọa độ B và I *(ở đây đề bài cho B có tọa độ nguyên nên chắc chắn sẽ phải suy nghĩ đến việc tìm tọa độ B rồi)*

+ $B \in BN: x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow B(3b-1;b)$, $\Rightarrow$ ta cần thiết lập 1 phương trình để tìm ra b = ?

Bây giờ dừng tại đây và tiếp tục quan sát hình xem bạn suy luận được gì nhé !

+ Nếu gọi P là trung điểm BC, $Q = AP \cap BN$ $\Rightarrow$ sẽ chứng minh được AP là đường thẳng qua A và $\perp BN \Rightarrow AP: 3x + y - 13 = 0$

+ Tọa độ $Q = AP \cap BN$, giải hệ có $Q\left(\frac{19}{5};\frac{8}{5}\right) \Rightarrow AQ = \sqrt{\frac{32}{5}}$

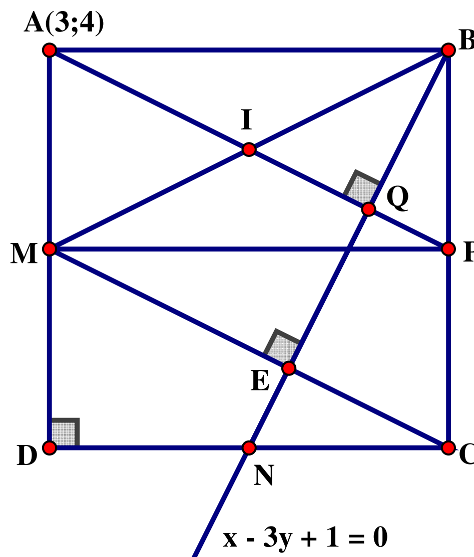
+ Mà AQ = BE (do $\Delta AQB = \Delta BEC$) $\Rightarrow BE = \sqrt{\frac{32}{5}}$, lại có $BE = 2.BQ$, giải phương trình

$BE = 2.BQ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \frac{6}{5} \notin Z \\ b = 2 \end{array}\right. \Rightarrow B(5;2)$ *(Đã tìm được B rồi nhé - gần xong rồi)*

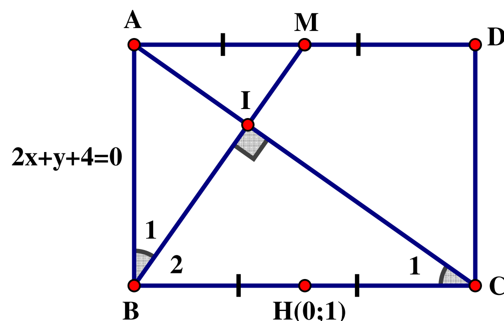
+ Bây giờ tìm I nhé: Gọi I là trung điểm MB $\Rightarrow$ I là trung điểm AP (do ABPM là hình chữ nhật) $\Rightarrow I \in AP \Rightarrow I(x;13-3x)$

Để tìm x, bạn chỉ cần giải phương trình IA = BI $\Rightarrow x = \frac{7}{2}$

Như vậy bài toán này có đáp số là $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$



Bài 25: Cho hình chữ nhật ABCD có $AD = AB\sqrt{2}$, AB có phương trình $2x + y + 4 = 0$, H(0;1) là trung điểm BC, M là trung điểm AD. I là giao điểm AC và BM. Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm B, I, C.



Hướng dẫn tìm lời giải

+ Với dạng bài tập này, theo kinh nghiệm ta sẽ chứng minh ΔBIC vuông tại I (đây là quyết định thành công). Thật vậy:

Ta có $\tan B_1 = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AD}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AB.\sqrt{2}}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan C_1 = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AB\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$, mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{B_2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BIC} = 90^0 \Rightarrow \Delta BIC$ vuông tại I

+ Như vậy, đường tròn đi qua 3 điểm B, I, C có tâm H(0;1), bán kính

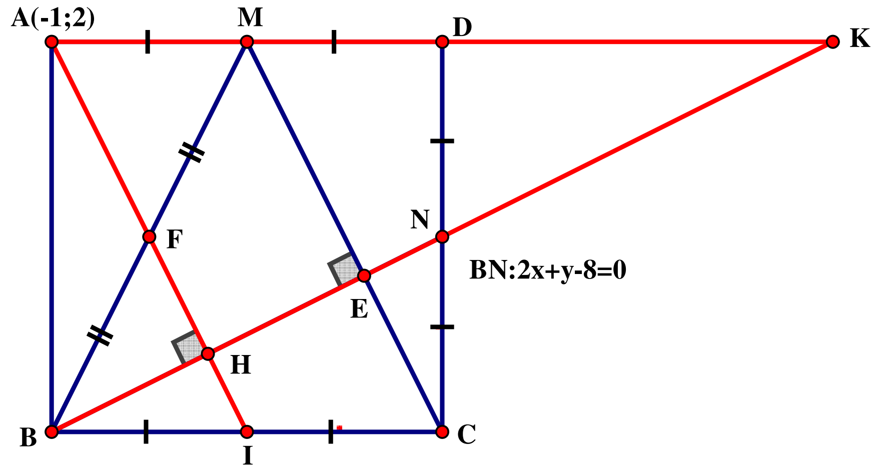
$R = BH = d(H;AB) = \sqrt{5}$.

Ta có đáp số cuối cùng của bài: $x^2 + (y-1)^2 = 5$

Bài 26: Cho hình vuong ABCD, A(-1;2). Các điểm M, N lần lượt là trung điểm AD, BC. E là giao điểm BN và CM. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔBME biết B có hoành độ lớn hơn 2 và đường thẳng BN có phương trình : $2x + y - 8 = 0$

Hướng dẫn tìm lời giải

+ Nhận thấy ΔBME vuông tại E *(bạn xem lại cách chứng minh nhé - dễ thôi)* $\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp ΔBME có tâm F là trung điểm BM, bán kính $R = FB = FM$. Như vậy bây giờ ta phải đi tìm được tọa độ B và M



*** Bước 1:** Tìm tọa độ B

+ $B \in BN \Rightarrow B(b, 8-2b)$, mà $d(A;BN) = \dfrac{|2.(-1)+2-8|}{\sqrt{2^2+1^1}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$ *(bạn hãy nhớ rằng trong hình học tọa độ phẳng khi cho 1 điểm biết tọa độ, 1 đường thẳng đã có phương trình thì ta luôn có thói quen tính khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng, có thể đây sẽ là gợi ý quan trọng để tìm ra hướng giải)*

+ Nếu gọi I là trung điểm BC, $H = AI \cap BN \Rightarrow \Delta ABI$ vuông tại B, đường cao BH

$$\Rightarrow AB^2 = AH.AI = \frac{8}{\sqrt{5}}\sqrt{AB^2 + BI^2} = \frac{8}{\sqrt{5}}\sqrt{AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 4AB \Rightarrow AB = 4$$

Giải phương trình AB = 4 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \frac{7}{5} < 2 \\ b = 3 > 2 \end{array}\right. \Rightarrow B(3;2)$

*** Bước 2:** Tìm tọa độ M

+ Gọi $K = BN \cap AD \Rightarrow D$ là trung điểm AK (do $\dfrac{KD}{KA} = \dfrac{DN}{AB} = \dfrac{1}{2}$)

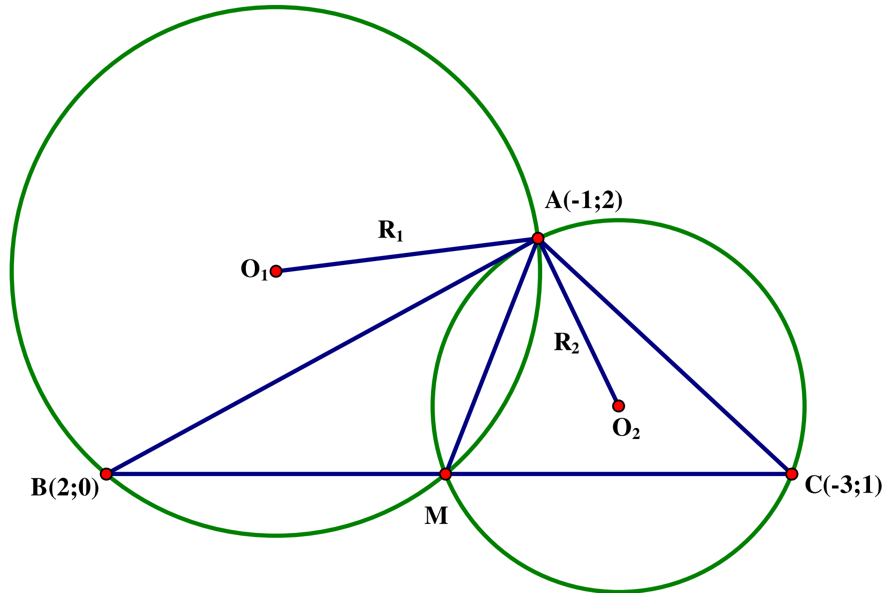
$\Rightarrow$ đường thẳng AK (đi qua A, vuông góc AB) : x + 1 = 0

$\Rightarrow K = AK \cap BN \Rightarrow K(-1;10) \Rightarrow D(-1;6) \Rightarrow M(-1;4)$

Vậy đáp số bài toán là : $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$

Bài 27: Cho ΔABC có $A(-1;2), B(2;0), C(-3;1)$. Gọi M là điểm di động trên BC. Gọi $R_1;R_2$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABM và ΔACM. Hãy xác định tọa độ của điểm M để R_1+R_2 nhỏ nhất.

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Áp dụng định lý hàm sin trong ΔAMB có :

$$\frac{AB}{\sin\left(\widehat{AMB}\right)}=2R_1 \Rightarrow R_1=\frac{AB}{2.\sin\left(\widehat{AMB}\right)}=\frac{\sqrt{13}}{2.\sin\left(\widehat{AMB}\right)}$$

+ Áp dụng định lý hàm sin trong ΔAMC có :

$$\frac{AC}{\sin\left(\widehat{AMC}\right)}=2R_2 \Rightarrow R_2=\frac{AC}{2.\sin\left(\widehat{AMC}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{2.\sin\left(\widehat{AMC}\right)}$$

$$\Rightarrow R_1+R_2=\frac{\sqrt{13}}{2.\sin\left(\widehat{AMB}\right)}+\frac{\sqrt{5}}{2.\sin\left(\widehat{AMC}\right)}$$

+ Mặt khác ta có : $\sin\left(\widehat{AMB}\right)=\sin\left(\widehat{AMC}\right)$ (do $\widehat{AMB},\widehat{AMC}$ là 2 góc bù nhau)

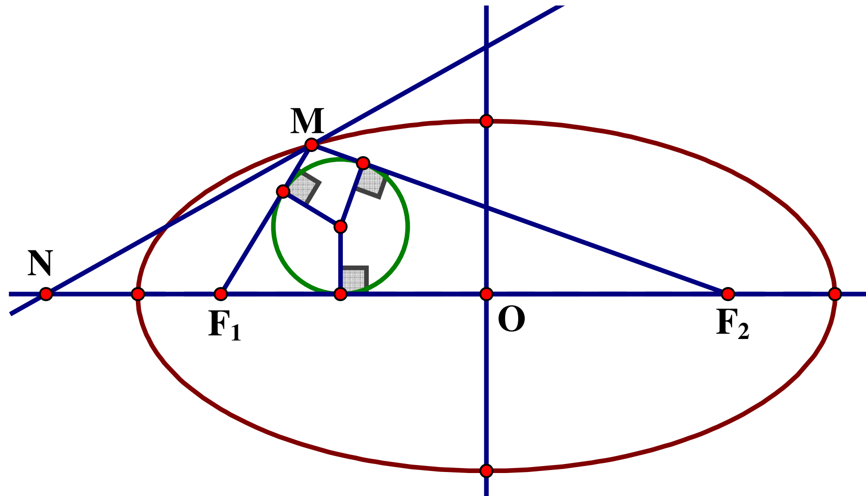
$$\Rightarrow R_1+R_2=\frac{\sqrt{13}+\sqrt{5}}{2.\sin\left(\widehat{AMB}\right)} \Rightarrow (R_1+R_2)_{MIN} \Leftrightarrow \left[\sin\left(\widehat{AMB}\right)\right]_{MAX} \Leftrightarrow \sin\left(\widehat{AMB}\right)=1 \Rightarrow \widehat{AMB}=90^0$$

$\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của A trên BC.

Như vậy, các bạn lập phương trình BC và tìm hình chiếu vuông góc của A trên BC sẽ được đáp số $M\left(\frac{33}{26};\frac{17}{26}\right)$

Bài 28: Cho $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có 2 tiêu điểm $F_1; F_2$. Giả sử M là điểm thuộc (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp ΔF_1MF_2 bằng $\frac{4}{3}$ và M có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M và tạo với hệ trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 9.

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Ta thấy ngay (E) có $a = 5; b = 3; c = 4$

+ Gọi $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1$ (1)

+ Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔF_1MF_2, ta có:

$$S_{\Delta MF_1F_2} = p.r = \frac{(MF_1 + MF_2 + F_1F_2)}{2}.r \Leftrightarrow \frac{1}{2}.F_1F_2.d(M;Ox) = \frac{(MF_1 + MF_2 + F_1F_2)}{2}.r$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2c.|y_0| = \frac{2a + 2c}{2}.\frac{4}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = -3 < 0 \\ y_0 = 3 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow M(0;3) \end{array}\right.$$ (em chú ý rằng $MF_2 + MF_2 = 2a$)

+ Gọi $N = (d) \cap Ox \Rightarrow N(n;0)$, mà $M(0;3) \in Oy$

+ Vì $S_{\Delta MON} = 9 \Rightarrow \frac{1}{2}.ON.OM = 9$, giải phương trình này $\Rightarrow m = \pm 6 \Rightarrow N(\pm 6; 0)$

Vậy có 2 đường thẳng (d) cần tìm là : $(d_1): x + 2y - 6 = 0, (d_2): x - 2y + 6 = 0$

Bài 29: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (C) tâm O: $x^2 + y^2 = 25$, điểm $E(-1;2) \in AB$. Đường cao BP và CQ $(P \in AC, Q \in AB)$, viết phương trình BC, biết $PQ: -4x + 3y - 10 = 0, x_A < 0$

Hướng dẫn tìm lời giải

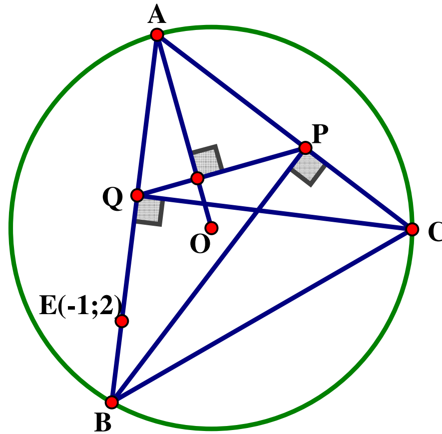
+ Trở lại bài tập dạng này, ta thấy điểm quan trọng là chứng minh được $AO \perp PQ$ ***(tính chất 2)***

Để lập được phương trình BC, với loại bài tập này, ta sẽ đi tìm tọa độ 2 điểm B, C theo suy luận các bước như sau:

+ Đường thẳng OA qua O và vuông góc với đường thẳng PQ $\Rightarrow AO: 3x + 4y = 0$

+ Tọa độ $A = AO \cap (C)$, giải hệ PT $\Rightarrow A(-4;3)$ (lưu ý $x_A < 0$ nhé)

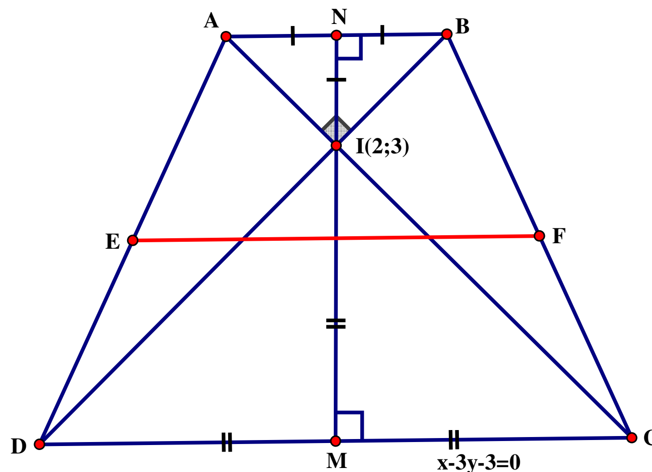
+ Đường thẳng AB đi qua A, E $\Rightarrow AB: x+3y-5=0$
+ Tọa độ $B = AB \cap (C)$, giải hệ PT $\Rightarrow B(5;0)$
+ Tọa độ $Q = PQ \cap AB$, giải hệ PT $\Rightarrow Q(-1;2)$
+ Đường thẳng CQ đi qua Q và vuông góc với AB $\Rightarrow CQ: 3x-y+5=0$
+ Tọa độ $C = CQ \cap (C)$, giải hệ PT $\Rightarrow C(-3;4)$
+ Biết tọa độ 2 điểm B, C $\Rightarrow BC: 2x-y-10=0$



Bài 30: Cho hình thang cân ABCD có diện tích bằng $\frac{45}{2}$, hai đường chéo $AC \perp BD$ tại $I(2;3)$. Đáy lớn CD có phương trình $x-3y-3=0$. Viết phương trình cạnh BC biết C có hoành độ dương.

Hướng dẫn tìm lời giải

Để làm bài tập về hình thang cân, các bạn chú ý một ***tính chất 11*** là *"Trong 1 hình thang cân có 2 đường chéo vuông góc, độ dài đường cao bằng độ dài đường trung bình".*



+ Trước hết gọi độ dài đường trung bình của hình thang vuông là x, vậy cần tìm x để chuẩn bị cho bước suy luận sau, thật vậy:

- Ta có $S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}.MN = \frac{45}{2} \Rightarrow x.x = \frac{45}{2} \Rightarrow x = 3\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow MN = x = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$

- Mặt khác ta tinh được ngay được khoảng cách $IM = d(I,CD) = \sqrt{10} \Rightarrow NI = MN - IM = \frac{\sqrt{10}}{2}$

- Lại áp dụng định lý Talet, ta thấy ngay $\frac{IM}{IN} = \frac{ID}{IB} = 2 \Rightarrow ID = 2.IB \Rightarrow \overrightarrow{DI} = 2.\overrightarrow{IB}$ (*)

Như vậy, từ (*), để tìm được tọa độ B, ta cần tìm tọa độ D, hơn nữa đề bài yêu cầu lập phương trình đường thẳng BC nên ta cần tìm tọa độ C nữa.

- Ta sẽ nhận thấy tọa độ D và C là giao điểm của đường tròn (C) tâm M, bán kính MI với đường thẳng BC, vậy ta cần tìm điểm M như sau:

+ $M \in CD \Rightarrow M(3m+3;m)$, do $IM \perp DC \Rightarrow \overrightarrow{IM}.\vec{n}_{DC} = 0$ giải PT này $\Rightarrow M(3;0)$

$\Rightarrow (C): (x-3)^2 + y^2 = 10$

+ Giải hệ $\{D;C\} = (C) \cap DC \Rightarrow C(6;1), D(0;-1)$ (chú ý $x_C > 0$ nhé)

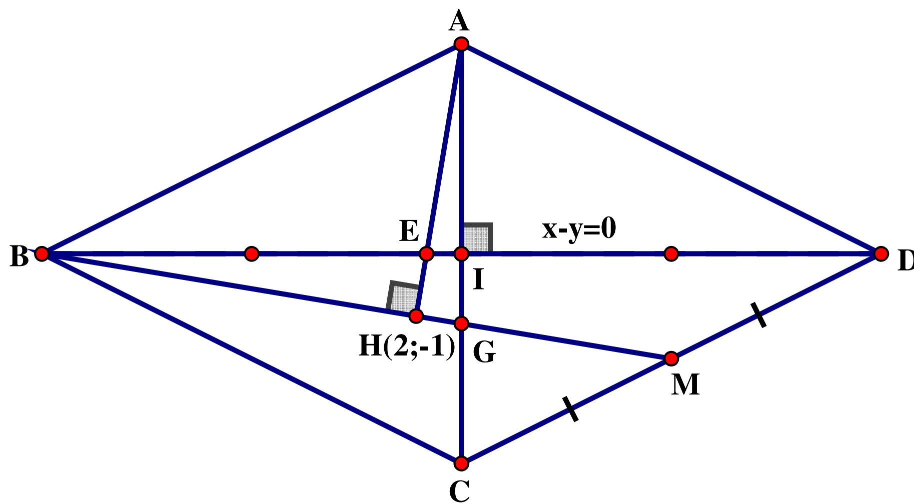
+ Gọi B(x;y), giải phương trình (*) $\Rightarrow B(3;5) \Rightarrow BC: 4x + 3y - 27 = 0$

Bài 31: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD, $BD = 2.AC$, BD có phương trình $x - y = 0$. M là trung điểm CD và $H(2;-1)$ là hình chiếu vuông góc của A trên BM. Biết phương trình đường thẳng AH

Hướng dẫn tìm lời giải

- Nhận xét thấy đường thẳng AH đi qua điểm $H(2;-1)$, vậy để lập phương trình AH ta phải tìm 1 điểm nữa thuộc AH, phương án này khó thực hiện, do đó trong trường hợp này ta nghĩ đến cách gọi VTPT của AH là $\vec{n}_1 = (a;b), a^2 + b^2 > 0$.

- Để tìm a, b trong trường hợp này ta thường nghĩ đến việc thiết lập góc giữa đường thẳng AH và BD *(BD đã có sẵn phương trình là $x - y = 0$ rồi $\Rightarrow$ VTPT cảu BD là $\vec{n}_2 = (1;-1)$)*



- Ta có góc tạo bởi 2 đường thẳng AH và BD là $\widehat{AEI}$, mà $\widehat{AEI} = \widehat{BEH}$ *(đối đỉnh)*, mặt khác $\widehat{BEH}$ và $\widehat{HBE}$ là 2 góc phụ nhau nên $\Rightarrow \cos\left(\widehat{AEI}\right) = \sin\widehat{HBE} \Rightarrow \cos\left(\widehat{\vec{n}_1;\vec{n}_2}\right) = \sin\widehat{HBE}$

- Đến đây ta phải tính làm sao cho cái $\sin\widehat{HBE}$ ra một hằng số để thiết lập ra phương trình rồi tìm a, b.

- Ta thấy nếu gọi $G = CI \cap BM \Rightarrow$ G là trọng tâm ΔBCD, hơn nữa đề bài còn cho ta $BD = 2.AC$ nên $\Rightarrow \sin\widehat{HBE} = \frac{GI}{BG} = \frac{GI}{\sqrt{BI^2 + IG^2}} = \frac{GI}{\sqrt{(6.IG)^2 + IG^2}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$

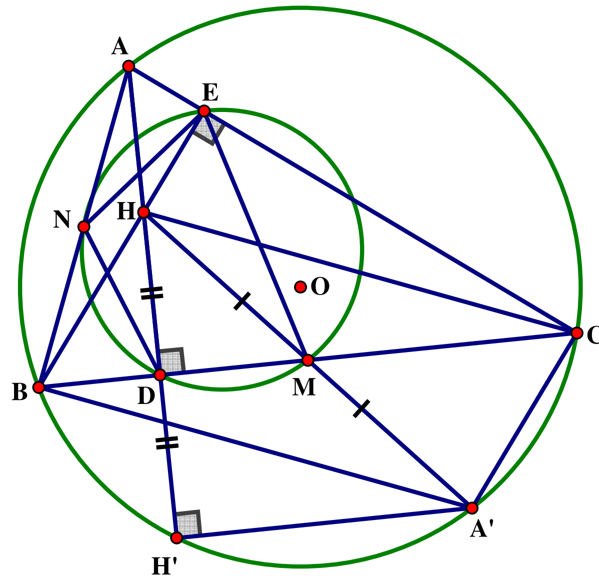
$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\vec{n}_1;\vec{n}_2}\right)=\frac{1}{\sqrt{37}} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 35a^2-74ab+35b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{7b}{5} \\ a=\frac{5b}{7} \end{array}\right.$$

+ TH1: Với $a=\frac{7b}{5}$, mà AH qua $H(2;-1)$, từ đây ta có $AH: 7x+5y-9=0$

+ TH2: tương tự ta có đáp số $AH: 5x+7y-3=0$

Bài 32: Cho ΔABC và đường thẳng $\Delta: x-3y-1=0$. Giả sử $D\left(4;\frac{7}{2}\right), E\left(\frac{14}{5};\frac{19}{10}\right), N(3;3)$ theo thứ tự là chân đường cao từ A, B và trung điểm của AB. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC biết M là trung điểm của BC nằm trên đường thẳng Δ và $x_M \le 4$

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Theo ***tính chất 6*** ta chứng minh được 4 điểm D, M, E, N nằm trên đường tròn (C')

+ Giả sử (C') có phương trình $x^2+y^2+2ax+2by+c=0, a^2+b^2-c>0$

$$+ \text{ Vì } D,E,N \in (C') \Rightarrow \begin{cases} 8a+7b+c=-\frac{113}{4} \\ \frac{28}{5}a+\frac{19}{5}b+c=-\frac{229}{20} \\ 6a+6b+c=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-\frac{9}{4} \\ c=\frac{39}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (C'): x^2+y^2-8x-\frac{9}{2}y+\frac{39}{2}=0$$

+ Ta có $M\in\Delta, M\in(C') \Rightarrow M=\Delta\cap(C')$, giải hệ phương trình $\Rightarrow M(4;1), x_M \le 4$

+ Tiếp theo ta lập được phương trình DM là $x-4=0$

+ Điểm $B\in DM \Rightarrow B(4;x)$, mà M là trung điểm BC $\Rightarrow C(4;2-x)$, mặt khác N là trung điểm AB $\Rightarrow A(2;6-x)$.

+ Do $BE \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(2;\frac{7}{2}\right), B\left(4;\frac{5}{2}\right), C\left(4;-\frac{1}{2}\right)$

Bài 33: Cho hình vuông ABCD tâm $I(1;1), M(-2;2) \in AB, N(2;-2) \in CD$. Tìm tọa độ A, B, C, D của hình vuông.

Hướng dẫn tìm lời giải

+ Gọi N' là điểm đối xứng của N qua I $\Rightarrow N' \in AB, N'(0;4)$.

+ Ta viết được phương trình AB qua M, N là: $x - y + 4 = 0$

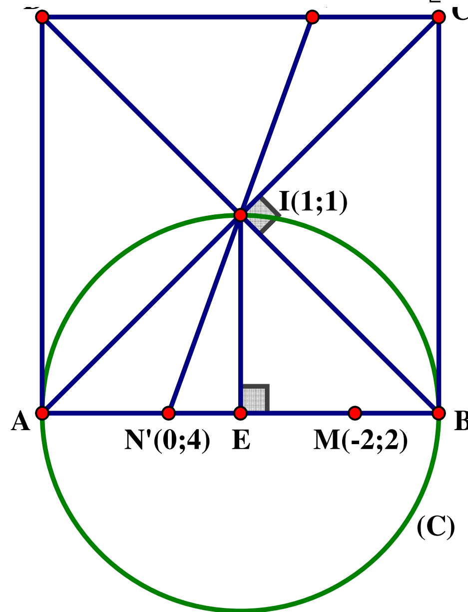
+ Gọi E là trung điểm của AB $\Rightarrow IE \perp AB$

+ Đường thẳng IE qua I và vuông góc với N'M $\Rightarrow IE: x + y - 2 = 0$

+ Giải hệ $E = IE \cap AB \Rightarrow E(-1;3)$

+ Đường tròn (C) tâm E, bán kính $R = IE = 2\sqrt{2}$ có phương trình: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8$

+ Tọa độ A, B là giao điểm của AB với (C), giải hệ ta có: $\left[\begin{array}{l} A(1;5), B(-3;1), C(1;-3), D(5;1) \\ A(-3;1), B(1;5), C(5;1), D(1;-3) \end{array}\right.$



Bài 34: Cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 2.AB$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Điểm $K(5;-1)$ là điểm đối xứng với M qua N, đường thẳng AC có phương trình $2x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ của A, B, C, D biết A có tung độ dương.

Hướng dẫn tìm lời giải

+ Gọi $I = AC \cap KD$

+ Theo tính chất 13 ta chứng minh được $\widehat{AID} = 90^0 \Rightarrow KD \perp AC$

Do đó ta lập được phương trình đường thẳng KD qua K và $KD \perp AC$ là: $x - 2y - 7 = 0$

+ Do $I = AC \cap KD$, giải hệ ta có $I\left(\frac{13}{5};-\frac{11}{5}\right)$

+ Gọi $E = AC \cap KM \Rightarrow \frac{ID}{IK} = \frac{CD}{KE} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow ID = \frac{2}{3}IK \Leftrightarrow KD - KI = \frac{2}{3}IK \Leftrightarrow KD = \frac{5}{3}KI$

Nếu giả sử $D(x;y)$, ta có $\overrightarrow{KD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{KI}$, giải phương trình này $\Rightarrow D(1;-3)$

+ Gọi $\vec{n} = (a;b)$ là véc tơ pháp tuyến của AD, AD qua D $\Rightarrow AD: ax + by - a + 3b = 0$

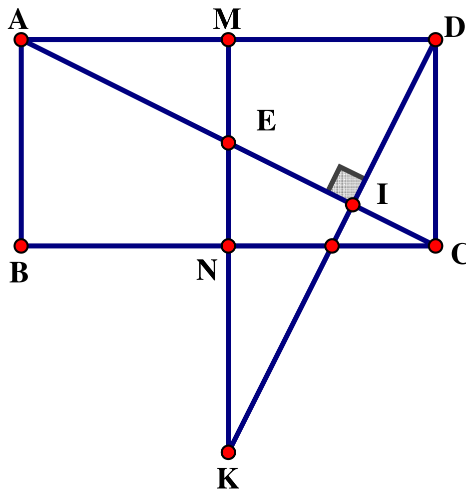
+ Ta có $\cos\left(\widehat{CAD}\right)=\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{\sqrt{AD^2+DC^2}}=\frac{AD}{\sqrt{AD^2+\left(\frac{AD}{2}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \cos\left(\widehat{AD,AC}\right)=\frac{\left|(a;b).(2;1)\right|}{\left|(a;b)\right|.\left|(2;1)\right|}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow 4ab-3b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=0\Rightarrow AD:x-1=0\\ b=\frac{4a}{3}\Rightarrow AD:3x+4y+9=0\end{array}\right.$

+ Do $A=AC\cap AD$, giải hệ phương trình $\Rightarrow A(1;1), y_A>0$

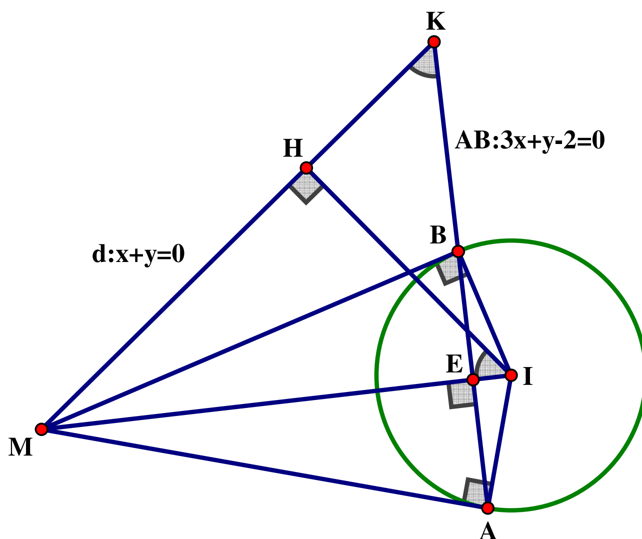
+ Đường thẳng DC đi qua A và vuông góc AD $\Rightarrow DC: y+3=0\Rightarrow C=AC\cap DC\Rightarrow C(3;3)$

+ E là trung điểm AC và BD $\Rightarrow E(2;-1)\Rightarrow B(3;1)$



Bài 35: Cho đường tròn (C) tâm I, bán kính bằng 2, điểm $M\in d: x+y=0$. Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là tiếp điểm). Viết phương trình của (C) viết $AB: 3x+y-2=0$ và $d(I;d)=2\sqrt{2}$

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Gọi $K=d\cap AB, E=MI\cap AB$

+ Gọi $I(a;b)$, ta có:

$d(I;d)=AH=2\sqrt{2}\Rightarrow |a+b|=4$ (1)

+ Ta có $\cos\left(\widehat{MIH}\right)=\frac{IH}{MI}=\frac{2\sqrt{2}}{MI}$ (*), mà $\widehat{MIH}=\widehat{K}$ (cùng phụ với $\widehat{KMI}$), mặt khác $\widehat{K}$ còn là góc tạo bởi đường thẳng d và AB. Vậy thay vào (*) ta có:

$\Rightarrow \frac{\left|(1;1).(3;1)\right|}{\left|(1;1)\right|.\left|(3;1)\right|}=\frac{2\sqrt{2}}{MI}\Rightarrow MI=\sqrt{10}$

+ Lại có:

$IB^2=IE.IM\Rightarrow IE=\frac{4}{\sqrt{10}}$

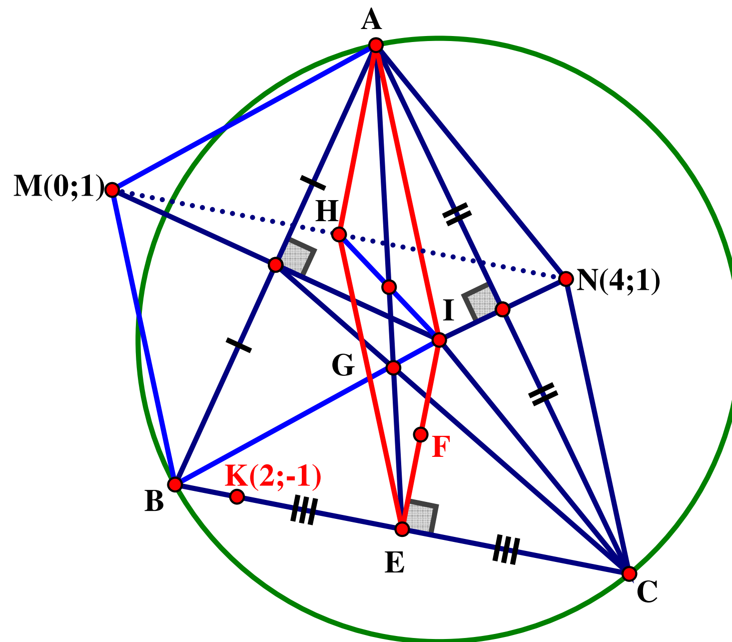
$\Rightarrow d(I;AB)=\frac{4}{\sqrt{10}}\Rightarrow |3a+b-2|=4$ (2)

Cuối cùng ta giải hệ (1) và (2) để tìm a, b $\Rightarrow$ phương trình đường tròn (C)

(Các bạn tự làm phần cuối này)

Bài 36: Cho ΔABC, điểm $G\left(\frac{8}{3};0\right)$ là trọng tâm, đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có tâm I. Các điểm $M(0;1), N(4;1)$ là điểm đối xứng với I qua AB và AC. Điểm $K(2;-1)$ thuộc đường thẳng BC. Viết phương trình đường tròn (C).

Hướng dẫn tìm lời giải



+ Tứ giác AMBI là hình thoi (do có 2 đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường và 2 cạnh kề $IA = IB$)

+ Tương tự ta cũng có ANCI là hình thoi, 2 hình thoi trên có các cạnh bằng nhau.

$\Rightarrow MNCB$ là hình bình hành. $\Rightarrow MN // BC$

+ Gọi H, E là các trung điểm của MN và BC $\Rightarrow H(2;1)$, do $\Delta MAN = \Delta BIC(c.c.c)$, mà $\Delta MAN, \Delta BIC$ là các tam giác cân tại A và I $\Rightarrow$ AH, IE là các đường cao của $\Delta MAN, \Delta BIC$ $\Rightarrow AH = IE$

+ Lại có $AH \perp MN, IE \perp BC, MN // BC \Rightarrow AH // IE$ $\Rightarrow$ AHEI là hình bình hành $\Rightarrow$ G là trọng tâm ΔHIE

+ Gọi F (x;y) là trung điểm IE, giải phương trình $\overrightarrow{HG} = 2.\overrightarrow{GF} \Rightarrow F\left(3;-\frac{1}{2}\right)$

+ Lập được phương trình đường thẳng IE qua F và vuông góc BC $\Rightarrow IE \perp MN \Rightarrow IE: x-3=0$

+ Ta có BC qua K và song song với MN $\Rightarrow BC: y+1=0$

+ Giải hệ $E = IE \cap BC \Rightarrow E(3;-1) \Rightarrow I(3;0)$

+ Do AHEI là hình bình hành $\Rightarrow IA = R = HE = \sqrt{5}$

Vậy $(C): (x-3)^2 + y^2 = 5$